Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bundschue, Johann von Gott, 1784-1851

Lehrbuch der Geometrie und Trigonometrie zum Gebrauche in den Schulen und zum Selbstunterrichte

Bd.: 1

Kempten 1826

Math.p. 59 l-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081550-5

Math. P.
5c9l

R

Lehrbuch

der

Geometrie und Trigonometrie

zum

Gebrauche in den Schulen

und

zum Selbstunterrichte,

von

Johann von Gott Bundschue,

Doktor der Philosophie, und Professor der Mathematik an der königlich-baierischen Lyzealklasse zu Kempten, wie auch korrespondirendem Mitgliede der allgemeinen kammeralistisch-ökonomischen Gesellschaft zu Erlangen.

R

Erster Theil,

welcher die Longimetrie und Planimetrie enthält.

Mit 9 Figuren-Tafeln.

Zweite Auflage.

Kempten, 1826.

Druck und Verlag von Tob. Dannheimer.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Seiner Exzellenz

dem Hochwohlgebornen,

Königlichen wirklichen geheimen Staats-Rathe,

Herrn

Gabriel Bernard von Widder,

Kommandeur

des Zivil-Verdienst-Ordens der Bayerischen Krone,

General-Kommissär und Präsidenten

der

Königlich-Bayerischen Regierung des Isarkreises,

hohen

erkornen Mitrathe der von Seiner Königlichen Majestät angeordneten erlauchten Kommission zur Ersparung im Staatshaushalte ꝛc.

widmet

d i e s e s D e n k m a l

tiefer Ehrfurcht

der Verfasser.

Euere Erzellenz,

Hochwohlgeborner Herr Geheimer

Staats-Rath und Regierungs-Präsident!

Hochgnädiger Gönner!

Indem ich Euerer Erzellenz ruhmvollen Namen dieses mein erneuertes Werk mit bescheidenem Stolze weihe; denke ich im Gefühle gerührter Ehrfurcht und Dankbarkeit, nicht, — wie es mir so oft leidige Impulse harter, neidischer Gegenwart abdrangen, der Schattenseite des Lehrerberufes nach: sondern ich wende mich wie beruhiget, ermuntert, und neu gestärkt, vielmehr der schönen, goldenen Lichtseite meines Berufes zu. Ich sehe da den mit unzähligen Hindernissen, Hemmungen, und feindseligen Dämonen der Wissenschaft, der Subjektivität, und der Zeit- und Orts-Konjunkturen kämpfenden Lehrer, beglückt im reichen Ersatz durch die eifrige Schaar hoffnungsvoller Jünglinge, vor der er, wie ein Vater umgeben von seiner liebenden Familie, dahin wandelt, in deren Kreise er sich wohl fühlt, für die er lebt, und wacht, und sich mühet. Ein reizendes

Perspektiv erweitert sich da vor seinen Blicken. Er ist der Kunstgärtner, dessen Hand jene kostbaren Schößlinge, und kräftigjungen Stämme anvertraut sind. Mit dem emsigen Pfleger der erlesensten Pflanzschule theilt er Sorge und Mühe, Fleiß und Opfer; aber auch Hoffnung, Freude, und Frucht. Und zwar in weit höherem, und vielfach edlerem Sinne. Der Florist, der Pomolog beglückt bloß durch Blüthe und Frucht ein gemeines, oder feineres Bedürfniß. Die Rücksicht auf die Erzeugnisse um ihrer selbst willen fällt schlechthin weg. Diese aber ist es hauptsächlich, die alle Schritte des geistigen Gärtners leitet, segnet, lohnt. Das künftige Glück, das innere, und mittelbar wohl auch das äußere des anvertrauten Jüngling's gründen, auf menschenwürdige, auf dauernde Weise, — dieses Arbeiten am fremden Glücke, dieses Bewußtsein, in einem fünf und zwanzigjährigen Lehramte leicht eben so viele Hunderte mehr oder minder nahe ihrem Ziele zugeführt zu haben, — o einzig lohnendes Gefühl! o große Entschädigung für so viele Duldungen, und Opfer, die dieser Beruf heischt.

Wenn ich diese Ernte in der Beglückung edler Jünglinge schön und herrlich nenne; so ist sie noch nicht die einzige.

Mit dem dankenden Blicke des Freundes sieht der edle Vater des edlen Sohnes das redliche, mitväterliche Mühen des Lehrers, das er mit hoher Resignation ihm weiht. Der hellsehende Vater, wie der niedere, bloß von dankbaren Gefühlen geleitete, schenkt Achtung, Anerkennung und Liebe dem stellvertretenden Freunde, und dem Lehrer wird das neue Glück zu Theil, mit den edelsten Vätern, ausgezeichnet durch Talente, Kenntnisse, durch Rang und Verdienste, gleichsam in die innigen Berührungen der Freundschaft zu kommen.

Von jeher ist die Bekanntschaft, die Achtung, und das vertrauendere Verhältniß großer, ausgezeichneter Männer gegen die auf dem einsamen Wege der Wahrheitsforschung Wandernden als ein vorzüglichstes Glück betrachtet und gepriesen worden. Weit entfernt von dem Zielpunkte des Eigennutzes, welche herrlichen Früchte gehen dem Literaten, und Pädagogen nicht aus dem Genusse solcher Freundschaft hervor!

Und in dieser doppelten Beziehung, Großmächtiger Gönner, darf, — muß ich mich ganz vorzüglich glücklich nennen. — Außer dem seltenen Glücke, mich einen Schüler des trefflichsten Lehrers nennen zu können, des Herrn Hofrathes und Professors Mahir, jenes Bildners und Schutzgeistes

meiner reiferen Jugend; — wie reich lohnte mich das Glück als Selbstlehrer! Zahlreiche beglückte, und den Staat beglückende Beamte hegen laute Gefühle des Dankes dem früheren Lehrer; eine Reihe der hochgeachtet'sten Staatsmänner schenken mir Huld, und lohnende, auszeichnende Achtung. In aller Fülle der Wünsche sehe ich mich in dieser Hinsicht in dem ruhmvollen Namen Hochihres Hauses beglückt. Euerer Exzellenz schon damals durch die vortrefflichsten Anlagen des Kopfes und des Herzens hoffnungsvoller Herr Sohn Johann Nepomuk, dermaliger Königlich-Bayerischer Forstbeamter, war meinem Unterrichte, meiner Leitung und Bildung in den wichtigsten Fächern des Lebens, in der Mathematik, in der Veredlung und Rektifizirung der Muttersprache, in der Reglerinn des Verstandes, — der Logik, anvertraut. Jene Jahre von 1808 bis 1816, während welcher ich so glücklich war, an dessen Bildung zu arbeiten, schweben mir noch mit seliger Erinnerung vor. Ich that nur meine Pflicht; aber ich entsprach dadurch den ausdrücklichen Wünschen des hochverdientesten Herrn Vaters, die mir Euere Exzellenz in den schmeichelhaftesten Ausdrücken kund thaten. Wie sehr erfreue ich mich, daß der hochgebildete Herr Sohn seine ausgezeichneten Kennt-

nisse und Talente einer meinem Berufe verwandten Geschäftsschwere zuwand! — Und diese gnädige Erlaubniß, womit mich Euere Exzellenz eben neuerlichst beglücken, Ihrem hochgefeierten Namen dieses geringe Denkmal meiner schuldigsten Ehrfurcht weihen zu dürfen, erneuert in mir mit Recht das Andenken an die Würde und Größe Ihres Karakters, an die Entschiedenheit Ihrer Hochverdienste, welchen durch den edelmüthigsten Monarchen, und das dankbare Vaterland zwar zu jeder Zeit, und durch alle Zwiespalt der Zeitzerwürfnisse hindurch, — aber dennoch in keinem Zeitmomente ausgezeichneter, glänzender, ruhmvoller gehuldigt ward, als eben in der glorreichsten Restaurations-Epoche unserer Tage. Die Weisheit des Königs wußte Ihre patriotischen, überwiegenden Verdienste und Einsichten, die geprüfte Gediegenheit des in allen Stürmen der Zeiten unerschütterlichen Karakters, nicht anerkennender zu lohnen, als durch Berufung zum Mitrathe über all das Heilige und Höchste, was zur Beglückung des Vaterlandes Noth thut.

Ich wünsche der weisen Wahl des weisesten König's, ich wünsche dem Vaterlande, ich wünsche jedem redlichen Arbeiter, ich wünsche mir selbst Glück zu diesem erhabenen Berufe, dessen Ruhm

durch keinen anderen, weder gegenwärtig, noch in den Annalen der Nachwelt, übertroffen werden kann. — Die dankbaren Enkel werden mit Ehrfurcht den Namen nennen, dessen wohlthätiger Segen sich bis auf die spätesten Nachkommen verbreitet.

Möge der Himmel, der so offenbar mit väterlicher Hand wacht für das Gedeihen des Vaterland's, Euerer Exzellenz edelstes Wollen und Wirken segnen, möge Er Ihre kostbaren Jahre mit Gesundheit, mit nie ermüdender Kraft ausrüsten, möge Er Sie in dem Glücke Ihrer hohen Familie die Befriedigung Ihrer erhabensten Wünsche, möge Er Sie in dem Glücke des Vaterland's, in der huldreichen Anerkennung des beßten König's — das einzige, das höchste Ziel Ihrer Wünsche, den vollendeten, reinsten Lohn Ihrer Anstrengungen finden lassen.

Ich geharre, Ihrer Gnade mich ehrerbiethigst empfehlend, mit tiefer Ehrfurcht

Euerer Exzellenz

Kempten,
im November 1825.

unterthänig = gehorsamster
Dr. Johann Bundschue,
Lyzeal-Professor, und erster Rektorats-Assessor.

Vorrede zur ersten Auflage.

Ich übergebe hier dem Publikum den ersten Theil meines Lehrbuches der Geometrie und Trigonometrie, welcher die Longimetrie und Planimetrie enthält; bis künftige Ostern erscheint der zweite Theil, in den ich die Stereometrie und praktische Geometrie sammt der ebenen Trigonometrie aufnehmen werde.

Ich bin zur Bearbeitung dieses Lehrbuches um so mehr aufgefordert, da meine Arithmetik sowohl an den königlich-baierischen Gymnasien, und in den lateinischen Vorbereitungs- und höheren Bürger-Schulen des Ober-Donaukreises, als auch an dem diesortigen königl. Lyzeum, und an mehreren königl. Studien-Anstalten außer dem Kreise als allgemeines Lehrbuch eingeführt ist, und der Herr Konrektor und Ordens-Ritter Kanonikus Stark, dann die Herren Studien-Rektoren Gruber, Böhm rc. den gegenwärtigen ersten Band des geometrischen Lehrbuches bereits für die Ober-Gymnasial-Klassen zu Augsburg, Dilingen, Kempten rc. zum Schulbuche bestimmten, und zum Theile schon in diesem Studien-Jahre darnach lehrten, während mir dasselbe bei meinen öffentlichen Vorlesungen über Geometrie und Trigonometrie als Leitfaden dient, damit auf diese Weise die Mathematik in den vorausgeheuden niederen, und in den höheren Gymnasial- und Lyzeal-Klassen nach einem und dem nämlichen Lehrbuche vorgetragen wird.

Indem ich im arithmetischen Lehrbuche die mathematischen Werke, die ich benützte, namentlich anführte, habe ich zugleich auch größtentheils diejenigen Schriften genannt, die ich bei der Bearbeitung des Lehrbuches der Geometrie und Trigonometrie zum Grunde legte; um deßwillen zähle ich dieselben nicht neuerdings auf, und bemerke nur, daß ich auch bei der Verfassung des geometrischen und trigonometrischen Lehrbuches ganz vorzüglich das schätzbarste mathematische Lehrbuch des Herrn geistlichen Rathes und Stadtpfarrers Professors Magold, und die Hefte benützte, die ich mir am königl. Lyzeum zu Dilingen sammelte, als ich mehrere Jahre hindurch den mathematischen Vorlesungen meines unvergeßlichen und vortrefflichen Lehrers, des königl. baierischen Herrn Kollegien-Rathes und Professors Dr. Ferdinand Mahir, beiwohnte.

Die aus der Arithmetik vorkommenden Sätze zitire ich hier z. B. auf diese Weise: „Arithm. I. §. 24., oder Arithm. IV. §. 44.", anstatt daß ich mich ausdrücke: „man sehe im I. Theile meines Lehrbuches der Arithmetik den §. 24., oder im IV. Theile desselben den §. 44."

Dilingen den 15. August 1818.

Professor Bundschue.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Durch die an vielen Studien-Anstalten des In- und Auslandes statt gehabte Einführung meiner mathematischen Lehrbücher wurde auch die zweite Auflage dieses Theiles nöthig, in welcher ich sorgfältig alle Druckfehler verbessert habe, die sich bei der ersten Auflage durch meine Entfernung von Kempten eingeschlichen hatten.

Diese neue Auflage enthält ebenfalls vollständig in der vorigen Ordnung, und bei der nämlichen Paragraphen-Zahl die ganze Longimetrie und Planimetrie; weßhalb sich an diesen Theil wieder unmittelbar der zweite Theil meines geometrischen und trigonometrischen Lehrbuches anschließt, welcher die Stereometrie und die ebene Trigonometrie nebst der Anwendung der Geometrie und Trigonometrie auf die Feldmeßkunst enthält.

Erscheint noch dazu, wie es mehrere Herren Lyzeal-Professoren der Mathematik wünschen, und ich es in kurzer Zeit zu bewerkstelligen Willens bin, der dritte Theil dieses Lehrbuches, in welchem die Polygonometrie, oder vielmehr die Goniometrie ꝛc. abgehandelt wird, so enthalten diese drei Theile alle Zweige, welche aus der Geometrie und Trigonometrie nach der allerhöchsten Verordnung vom 10. Oktober 1824, so wie nach den früheren allerhöchsten Bestimmungen, in dem Königreiche Baiern an den Gymnasien, und in den Lyzealklassen zu lehren sind, und es kann passend zur harmonischen Fortsetzung des Unterrichtes von Klasse zu Klasse der erste und zweite Theil in den drei oberen Gymnasialklassen, und der dritte Theil in den Lyzealklassen als Schulbuch gebraucht werden; weil dem geometrischen und trigonometrischen Lehrbuche mein viertomiges Lehrbuch der Arithmetik vorausgeht, von welchem wegen der günstigsten Aufnahme, die das Werk allenthalben gefunden

hat, die drei ersten Theile bereits in dritter, und der vierte Theil in zweiter Auflage erschienen sind, und worin alle Zweige vorkommen, die aus der niederen und höheren Arithmetik sowohl in den lateinischen Vorbereitungsschulen, als auch in den Gymnasial- und Lyzeal-Klassen dozirt werden müssen.

Ohne die Gränzen der Bescheidenheit zu überschreiten, und dem Werthe der übrigen mathematischen Schulbücher, welche von öffentlichen Lehrern, und von anderen verdienten Männern mit Rücksicht auf die bestehenden allerhöchsten königl. baier. Vorschriften zum Drucke befördert wurden, nur auf irgend eine Weise nahe zu treten, darf ich behaupten, daß es außer meinen Lehrbüchern nur sehr wenige gibt, die in eben dieser Ordnung alle mathematischen Theile befassen, welche von der ersten bis zur letzten der genannten Klassen vorzutragen sind.

Aus diesem Grunde schmeichle ich mir auch, daß dieselben fernerhin für den Schul- und Privat-Gebrauch die nämliche gute Aufnahme und Verbreitung finden werden, und ich werde mich, um nach und nach die gesammte reine Mathematik zu behandeln, um so mehr nach Kräften bemühen, auch noch die übrigen höheren algebraischen und geometrischen Zweige zu bearbeiten und der Presse zu überliefern, da ich nach der neuen allerhöchsten Studien-Einrichtung vom 10. Oktober vorigen Jahres wieder zum Lyzeal-Professor der Mathematik ernannt wurde, und schon 17 Jahre an höheren königl. baier. Studien-Anstalten ausschlußweise nur für mein Lieblingsfach, die Mathematik, angestellt bin.

Kempten, den 30. August 1825.

Dr. Johann Bundschue,
Lyzeal-Professor der höheren Mathematik,
und erster Rektorats-Assessor.

Inhalt.

Einleitung in die Geometrie.

Vorläufige Begriffe . . Seite 1. §. 1. bis §. 6.

I. Theil der Geometrie.

Die Longimetrie.

I. Hauptstück.

Erste Begriffe und Lehrsätze.

I. Abschnitt.

Von geradlinigten Winkeln und Figuren S. 9. §. 7 — §. 13.

II. Abschnitt.

Vom Kreise . . . . S. 21. §. 14 — §. 17.

II. Hauptstück.

Von der Lage und Größe gerader Linien.

I. Abschnitt.

Von der Lage und Größe geraden Linien in Dreiecken S. 31. §. 18 — §. 36.

II. Abschnitt.

Von Parallellinien . . . S. 64. §. 37 — §. 45.

III. Abschnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien in Vierecken S. 81. §. 46 — §. 51.

IV. Abschnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien in Vielecken S. 93. §. 52 — §. 54.

V. Abschnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien in Betreff des Kreises, und vom Maaße der Winkel S. 102. §. 55 — §. 78.

III. Hauptstück.

Von Verhältnissen gerader Linien.

I. Abschnitt.

Von Verhältnissen gerader Linien in geradlinigten ebenen Figuren . . . . S. 130. §. 79 — §. 101.

II. Abschnitt.

Von Verhältnissen gerader Linien im Kreise S. 153. §. 102 — §. 110.

IV. Hauptstück.

Von der Lage und den Verhältnissen der Kreislinien.

I. Abschnitt.

Von der Lage der Kreislinien gegen einander in einer Ebene . . . . . S. 167. §. 111 — §. 118.

II. Abschnitt.

Von Verhältnissen der Kreislinien S. 178. §. 119 — §. 134.

II. Theil der Geometrie.

Die Planimetrie.

I. Hauptstück.

Von der Gleichheit und Verwandlung der Figuren S. 205. §. 135 — §. 151.

II. Hauptstück.

Von Verhältnissen, und von der Bestimmung des Flächeninhaltes der Figuren . S. 221. §. 152 — 167.

III. Hauptstück.

Von der Lage gerader Linien gegen Ebenen, und verschiedener Ebenen gegen einander S. 241. §. 168 — §. 183.

Einleitung in die Geometrie.

Vorläufige Begriffe.

§. 1.

Ausgedehnte Größe, und Geometrie.

a) Eine stätige Größe (Arithmetik I. §. 2. g.) heißt **ausgedehnt**, wenn ihre Theile außerhalb einander sind.

b) Die Wissenschaft von den stätigen ausgedehnten Größen heißt **Geometrie**, was schon im I. Theile des Lehrbuches der Arithmetik im §. 6. b. gesagt wurde (Arithm. I. §. 6. b.).

I. **Zusatz**: Ausgedehnte Größen, die einander vollkommen decken, oder genau in einander passen, sind kongruent (Arithm. I. §. 2. h.); weil dann alle ihre Theile der Ordnung nach einerlei Größe und Lage, und deßhalb die nämliche Quantität und Qualität haben.

II. **Zusatz**: Und umgekehrt kongruente ausgedehnte Größen decken einander, oder passen genau in einander, weil sie sonst nicht gleiche Quantität und Qualität hätten, und also auch nicht kongruent sein könnten.

III. **Zusatz**: Kongruente ausgedehnte Größen sind ganz einerlei, und können für einander gesetzt werden (Arithm. I. §. 10. Nro. 10.).

IV. **Zusatz**: Da es außer Zeit und Raum keine andere **ausgedehnte stätige reine** Größen gibt, so macht die Ausdehnung der Zeit und des Raumes den Gegenstand der **reinen Geometrie** aus (Arithm. I. §. 6.).

§. 2.

Körper, Fläche, Linie und Punkt.

a) Ein allenthalben oder völlig begränzter Raum ist das, was ein **geometrischer Körper** genannt wird.

b) Die Gränze des Körpers, oder die Ausdehnung desselben an seinen Gränzen heißt eine geometrische Fläche.

c) Die Gränze der Fläche, oder die Ausdehnung der Fläche an ihren Gränzen heißt eine geometrische Linie. Und

d) Die Gränze einer Linie wird ein geometrischer Punkt genannt.

I. Zusatz: Weil die Gränze eines Dinges nicht ein Theil, sondern nur das Aufhören desselben ist, so ist die Fläche nicht ein Theil des Körpers, die Linie nicht ein Theil der Fläche, und der Punkt nicht ein Theil der Linie; um deßwillen kann man nicht sagen, daß der geometrische Körper aus Flächen, die Fläche aus Linien, und die Linie aus Punkten bestehe oder zusammengesetzt sei.

II. Zusatz: Die geometrischen Körper, Flächen, Linien und Punkte sind nicht gleichartige Dinge, weil sie nicht Theile von einander sind, und jeder Theil mit seinem Ganzen gleichartig ist: wohl aber ist jeder Theil eines geometrischen Körpers selbst ein Körper, jeder Theil einer Fläche selbst eine Fläche, und jeder Theil einer Linie selbst eine Linie.

III. Zusatz: Die geometrischen Flächen und Linien sind ausgedehnte stätige Größen (§. 1.), wie die körperlichen Räume, die Punkte aber sind unausgedehnt, und die letzte Gränze alles Ausgedehnten im Raume; deßhalb gibt es im Raume dreierlei Arten von ausgedehnten Größen, nämlich körperliche Räume, Flächen und Linien, und dreierlei Arten von Gränzen der Ausdehnung, als geometrische Flächen, Linien und Punkte.

IV. Zusatz: Ein geometrischer Körper hat drei Dimensionen oder Abmessungen, nämlich eine Ausdehnung nach Länge, Breite und Höhe; eine Fläche hat zwei Dimensionen, nach Länge und Breite; eine Linie hat nur eine Dimension nach Länge; und der Punkt hat gar keine Dimension oder Ausdehnung.

V. Zusatz: Alle geometrischen Punkte sind, an sich betrachtet, völlig einerlei, weil sie keine Theile ha-

ben, und in ihnen nichts Gleichartiges ist, und somit alle rücksichtlich ihrer Quantität einerlei sind, gleichwie sie alle, da sie nur Gränzen der Linien sind, die nämliche Qualität haben. Die geometrischen Linien und Flächen sind kongruent, wenn sie sich vollkommen decken, folglich so auf einander gelegt werden können, daß ihre Gränzen genau zusammen passen, und die geometrischen Körper sind kongruent, oder haben gleiche Qualität und Quantität, wenn sie genau in einander passen (§. 1. Zus. I.).

VI. Zusatz: Die Zeit, welche nur eine Dimension nach Länge hat, ist durch eine Linie, mithin durch eine Dimension des Raumes darstellbar; um deßwillen ist die reine Geometrie die Wissenschaft des Raumes (§. 1. Zus. IV.).

Anmerkung: 1) Auf dem bisher Gesagten beruht die Vorstellung von einer Ausdehnung nach Länge, Breite und Dicke. Da die Linie nur den unausgedehnten Punkt zur Gränze hat, so geht ihre Ausdehnung nur nach einer Seite, die wir Länge nennen.

Die Fläche hat schon Linien zu Gränzen, folglich sind in ihr auf jeder Linie noch unzählig viele andere möglich, die nach einer anderen Seite, als jene, gehen, und die wir daher zum Unterschiede von der ersteren Breite nennen.

Der körperliche Raum hingegen hat Flächen zu Gränzen, daher sind in ihm auf jeder Fläche noch unzählig viele andere Linien möglich, die nach einer anderen Seite, als nach ihrer Länge und Breite, gehen, und die wir daher die Dicke, Höhe oder Tiefe nennen.

Auf diese Weise stellen wir uns eine Linie bloß als Länge, eine Fläche bloß als eine Ausdehnung nach Länge und Breite, und einen körperlichen Raum als eine Ausdehnung nach Länge, Breite und Dicke vor.

2) Geometrische Punkte, Linien und Flächen können nicht gezeichnet werden. So fein auch die Zeichnung sein mag, so sind alle unsere gezeichneten Punkte, Linien und Flächen schon geometrische Körper, die eine Länge, Breite und Dicke haben. Daher müssen wir bei den gezeichneten Punkten von aller Ausdehnung überhaupt, bei den gezeichneten Linien von aller Breite und Dicke, und bei den gezeichneten Flächen von aller Dicke in Gedanken abstrahiren, und unsere gezeichneten Punkte,

Linien und Flächen zeigen nur an, wo mathematische Punkte, Linien und Flächen gedacht werden müssen.

3) Eine ausgedehnte stätige Größe wird in zwei Theile getheilt, wenn man die gemeinschaftliche Gränze der beiden Theile bestimmt, und Körper werden durch Flächen, Flächen durch Linien, und Linien durch Punkte getheilt.

4) Wenn gleich die Linie nicht aus Punkten besteht oder zusammengesetzt ist, so kann man doch in einer Linie überall nach Belieben in ihrer Ausdehnung Punkte annehmen, weil sich bei derselben überall ihr Anfang oder ihr Ende denken läßt.

Auf eine ähnliche Weise, und aus dem nämlichen Grunde lassen sich nach Belieben bei Flächen Linien, und bei Körpern Flächen annehmen.

5) Wenn man sagt, daß Linien durch Linien, und Flächen durch Flächen getheilt werden, so durchschneiden sich die Linien und Flächen, und dieses geschieht bei Linien in Punkten, und bei Flächen in Linien; indem bei Linien die Gränzen der Theile, welche wieder Linien sind, durch Punkte, und bei Flächen die Gränzen der Theile, die ebenfalls Flächen sind (§. 2. Zus. II.), durch Linien bestimmt werden.

§. 3.

Gerade und krumme Linien, dann gerad gebrochene und krumm gebrochene, wie auch gemischte Linien.

a) Eine Linie heißt **gerad** (linea recta), wenn alle ihre Theile einerlei Richtung haben; daher ist (Fig. 1.) die Linie AB eine gerade Linie, wenn alle ihre Theile nach einer Richtung liegen.

b) Eine Linie heißt **krumm** (linea curva), wenn ihre Theile eine verschiedene Richtung haben, so daß kein Theil von ihr gerade ist; wie (Fig. 2.) die Linie CD.

c) Eine Linie heißt eine **gerad gebrochene**, oder **gebrochene gerade** Linie, wenn sie aus verschiedenen geraden Linien zusammengesetzt ist; wie (Fig. 3.) die Linie ABCDE.

d) Eine Linie, welche aus verschiedenen krummen Linien zusammengesetzt ist, heißt eine **krumm gebrochene**, oder **gebrochene krumme** Linie; wie (Fig. 4.) die Linie ABCD.

e) Endlich wird eine Linie eine gemischte Linie genannt, wenn sie aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt ist; wie (Fig. 5.) die Linie ABCDE.

I. Zusatz: Von einem Punkte A (Fig. 1.) zum anderen B ist allemal eine gerade Linie möglich, und diese kann durch ihre Endspunkte A und B nach beiden Seiten ohne Ende verlängert werden.

II. Zusatz: Von einem Punkte A (Fig. 1) zum anderen B ist nur eine einzige gerade Linie möglich, und diese ist zwischen beiden Punkten A und B die kürzeste, weil jede andere Linie, welche die nämlichen Endspunkte A und B hat, und mit der geraden Linie nicht zusammenfällt, wegen der verschiedenen Richtung ihrer Theile krumm oder gebrochen sein muß, und die gerade Linie AB vom Punkte A zum Punkte B so hingehet, daß sie weder auf die eine, noch auf die andere Seite abweichet, was bei einer krummen oder gebrochenen Linie, die zwischen den beiden Punkten A und B gezogen wird, der Fall nicht ist. Daher wird auch die gerade Linie AB die Entfernung des Punktes A vom Punkte B genannt.

III. Zusatz: Durch zwei Punkte ist die Lage einer geraden Linie, und durch die Endspunkte zugleich die Größe derselben bestimmt.

IV. Zusatz: Zwei gerade Linien durchschneiden einander nur in einem Punkte; denn hätten sie zwei oder mehrere Punkte gemein, so hätten sie die nämliche Lage (Zus. III.), und würden sich nicht schneiden, da sie in eine einzige gerade Linie zusammen fallen, und nach einerlei Richtung über einander liegen würden.

V. Zusatz: Alle geraden Linien sind von gleicher Qualität; um deßwillen sind zwei gleich lange gerade Linien kongruent, und umgekehrt sind alle kongruenten geraden Linien gleich lang.

Anmerkung: Gerade Linien werden mit zwei Buchstaben bezeichnet, die man gewöhnlich an die Endspunkte hinschreibt, manchmal aber auch mit einem Buchstaben, den man in die Mitte der Linie hinschreibt; und krumme, wie auch gebrochene Linien werden mehrentheils der Deutlichkeit wegen mit mehr als zwei Buchstaben bezeichnet.

§. 4.

Ebene, krumme Fläche.

a) Eine Fläche heißt **eben** (Superficies plana), oder eine **Ebene** (Planum), wenn jede gerade Linie, die man von irgend einem Punkte derselben zu einem anderen in ihr zieht, ganz in der Fläche liegt.

b) Eine Fläche heißt **krumm**, wenn nicht immerhin nach zwei ihrer Punkte eine gerade Linie so gelegt werden kann, daß sie ganz auf der Fläche aufliegt.

Zusatz: Eine gerade Linie, von welcher zwei Punkte in einer Ebene sind, liegt ganz in dieser Ebene.

Anmerkung: 1) Aus der Abtheilung der Linien in gerade und krumme Linien (§. 3.), und aus der der Flächen in Ebenen, und in krumme Flächen folgt die Eintheilung der Geometrie in die Elementar= und in die höhere Geometrie (Arithm. I. §. 7. b.).

2) Wenn eine Ebene durch eine gerade Linie von unbestimmter Größe getheilt wird (§. 2. Anmerk. 3.), so haben die beiden Theile der Ebene gegen diese Linie eine **entgegengesetzte** Lage; liegt z. B. der eine Theil rechts, so liegt der andere links.

3) Liegt ein Punkt, oder eine Linie weder in einer Ebene, noch in ihrer Verlängerung, so sagt man, der Punkt oder die Linie liege **außerhalb dieser Ebene**; eben so liegt ein Punkt **außerhalb einer geraden Linie**, wenn er weder in ihr selbst, noch in ihrer Verlängerung liegt.

4) Mechanisch werden die geraden Linien mittels der Regel oder des Lineals auf dem Papier gezeichnet, oder vielmehr auf diese Weise nur die Stellen bezeichnet, wo die geometrischen geraden Linien gedacht werden müssen.

§. 5.

Eintheilung der Geometrie in die Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie.

a) Jener Theil der Geometrie, in welchem die Lage und Größe, und die Verhältnisse der Linien bestimmt werden, heißt **Longimetrie**;

b) Jener Theil, in welchem von der Größe und den Verhältnissen der Flächen gehandelt wird, heißt **Planimetrie**, indem man sich dabei größten Thei-

les auf Ebenen, die den krummen Flächen zum Grunde liegen, beschränkt;

c) Endlich wird jener Theil der Geometrie, welcher von Körpern handelt, und die körperlichen Räume zum Hauptgegenstande hat, Stereometrie genannt.

Zusatz: Die Geometrie besteht also aus drei Haupttheilen, nämlich aus der Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie.

Anmerkung: In der Longimetrie und Planimetrie, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil angezeigt ist, wird immer vorausgesetzt, daß sich alle Punkte und Linien in der nämlichen Ebene befinden.

§. 6.

Bestimmung, in wie ferne eine ausgedehnte Größe von gewisser Art gegeben ist.

Wenn für gewisse Stücke in jeder beliebig angenommenen Lage nicht mehr als eine ausgedehnte Größe von gewisser Art möglich ist so sagt man, daß die Größe und alle übrigen Stücke derselben durch die angenommenen Stücke gegeben oder vollkommen bestimmt sind.

Zusatz: Wenn eine ausgedehnte Größe durch gewisse Stücke gegeben ist, so sind alle Größen von derselben Art, in welchen jene Stücke kongruent sind, selbst kongruent.

Sind nämlich die angenommenen Stücke in zwei ausgedehnten Größen kongruent, so lassen sie sich völlig substituiren, das ist, die Stücke der zweiten Größe lassen sich völlig da denken, wo die Stücke der ersten liegen.

Nun aber ist nach der Voraussetzung durch die angenommenen Stücke der ersten Größe diese selbst gegeben, folglich ist in ihrer angenommenen Lage nur eine ausgedehnte Größe von dieser Art möglich; um deßwillen muß in dieser Lage die ganze zweite Größe völlig da liegen, wo die erste lag, und die beiden Größen sind kongruent.

Anmerkung: 1) Auf dem so eben Gesagten beruht die ganze Beurtheilung der Kongruenz ausgedehnter Größen.

Von ausgedehnten Größen, nämlich von Linien, Flächen und Körpern, welche kongruent sind, sagt man gewöhnlich, sie decken einander, oder sie passen auf oder in einander (§. 1. Zus. I — III.), d. h., sie lassen sich in Gedanken völlig substituiren, und sind daher rücksichtlich ihrer Qualität und Quantität vollkommen einerlei, mithin bloß dem Orte nach verschieden, so daß sie, wenn man sich dieselben zugleich an der nämlichen Stelle des Raumes vorstellen wollte, nur ein einziges Ding sein würden.

Will man nun beurtheilen, ob zwei ausgedehnte Größen kongruent sind, so darf man ihre Substitution nicht erst jedesmal wirklich vornehmen, sondern nur zeigen, durch welche Stücke die Größe gegeben, oder vollkommen bestimmt wird, weil dann bei solchen Größen die übrigen Stücke auch kongruent sein, oder sich decken müssen.

2) Wenn ich mich von nun an auf eine Annahme oder Voraussetzung berufe, so werde ich es mehrentheils durch den lateinischen Ausdruck »per hypothesin, ex hxpothesi« oder kürzer »per hyp., ex hyp.« bezeichnen, welches dann eben so viel heißt, als »der Annahme gemäß oder nach der Voraussetzung.«

3) Auf eine ähnliche Weise werde ich mich des Ausdruckes »ex constructione«, oder kürzer »ex constr.« bedienen, wenn ich dadurch anzeigen will, daß irgend ein Satz der vorgenommenen Zeichnung gemäß richtig ist; beschreibe ich z. B. eine gerade Linie, welche einer anderen gleich ist, so sage ich dann mit Wahrheit, daß der vorgenommenen Zeichnung gemäß (ex constructione oder ex constr.) diese Linien wirklich einander gleich sind.

4) Eben so bediene ich mich öfters des Ausdruckes »ex definitione« oder kürzer »ex def.«, wenn ich mich auf einen aufgestellten Begriff, oder auf eine angegebene Definition berufe.

I. Theil der Geometrie.

Die Longimetrie.

I. Hauptstück.

Erste Begriffe und Lehrsätze.

I. Abschnitt.

Von geradlinigten Winkeln und Figuren.

§. 7.

Geradlinigter Winkel überhaupt, und dann gerader Winkel.

a) Die Neigung zweier gerader Linien, die in einem Punkte zusammen stossen, heißt ein geradlinigter Winkel, oder kürzer ein Winkel (Angulus); daher bilden (Fig. 6.) die beiden Linien AB und BC einen solchen Winkel.

b) Die beiden Linien AB und BC heissen die Schenkel (Crura); und

c) Der Punkt B, in welchem diese Linien zusammen treffen, heißt der Scheitel (Vertex);

d) Die Bezeichnung des Winkels geschieht entweder durch einen Buchstaben an dem Scheitel, oder durch einen zwischen die Schenkel gesetzten Buchstaben, oder auch durch drei Buchstaben an den Schenkeln so, daß der Buchstabe von dem Scheitel in die Mitte zu stehen kommt; daher bezeichnet man (Fig. 6.) den Winkel, welchen die Linien AB und BC bilden, mit B oder x, wie auch durch ABC oder CBA.

I. Zusatz: Die beiden Schenkel können zu einander jede beliebige Neigung, mithin auch eine solche Lage haben, daß sie zusammen in eine gerade Linie fallen, und ein jeder in der Verlängerung des anderen liegt; ein solcher Winkel heißt ein gerader Winkel (Angulus directus), wie (Fig. 7.) der Winkel ABC.

II. Zusatz: Die Größe des Winkels bleibt unverändert, wenn man die Schenkel desselben nach Belieben länger oder kürzer macht, weil dadurch die Neigung derselben zu einander nicht verändert wird.

III. Zusatz: Zwei zusammenstoßende gerade Linien liegen allemal in der nämlichen Ebene (§. 4. a.), weil ihre Lage durch drei Punkte bestimmt ist, durch die jedesmal eine Ebene gelegt werden kann; daher wird der geradlinigte Winkel auch ein ebener Winkel genannt.

IV. Zusatz: Gleiche geradlinigte Winkel decken einander, und sind deßhalb kongruent; denn legt man (Fig. 6 und 8.) die gleichen Winkel ABC und abc so auf einander, daß die Scheitel b und B, und die Schenkel BC und bc auf einander fallen, so müssen auch die beiden anderen Schenkel BA und ba zusammen treffen Wäre dieses nicht, so wäre der erste Winkel kleiner oder größer als der zweite, nämlich Dbc wäre kleiner, und Ebc größer, als ABC, was gegen die Voraussetzung ist.

Es sind also alle geradlinigten Winkel von gleicher Qualität, und zu ihrer Kongruenz wird nur mehr erfordert, daß sie gleich groß sind, somit die Schenkel die nämliche Neigung zu einander haben.

V. Zusatz: Im Scheitel B ist (Fig. 7.) durch den Schenkel AB von beliebiger Länge allemal seine Verlängerung BC, mithin der gerade Winkel gegeben, und alle geraden Winkel sind mit einander kongruent.

Anmerkung: 1) Wenn zwei gerade Linien einen Punkt gemein haben, so stoßen oder kommen sie in diesem Punkte zusammen (concurrunt), und der Punkt

heißt der **Punkt des Zusammenstoßens** (Punctum concursus). Sind zwei zusammenstoßende gerade Linien (Fig. 7.) nur Theile einer einzigen geraden Linie, so nennt man sie einander **gerade** oder **direkt** entgegengesetzt (in directum ponuntur); sind aber zwei zusammenstoßende gerade Linien (Fig. 6.) nicht Theile einer einzigen geraden Linie, so nennt man sie einander **indirekt entgegengesetzt** (in indirectum ponuntur).

2) Kann man zwei geradlinigte Winkel so auf einander legen, daß die Scheitelpunkte und allemal die beiden Schenkel zusammen fallen, so sind sie kongruent; und decken einander, wenn man sie auch umgekehrt auf einander legt, oder über einander schlägt.

Will man nun die Kongruenz zweier geradlinigter Winkel untersuchen, so legt man sie so auf einander, daß die Scheitel und zwei beliebige Schenkel zusammentreffen; fallen in dieser Lage auch die beiden anderen Schenkel zusammen, so sind die Winkel kongruent: im entgegengesetzten Falle aber sind die Winkel ungleich, und nicht kongruent.

3) Wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, so versteht man unter dem Worte Winkel ohne Beisatz allemal einen ebenen geradlinigten Winkel; indem jetzt von krummlinigten und vermischtlinigten Winkeln, das ist, von solchen Winkeln die Rede noch nicht ist, welche krumme Linien mit einander, oder gerade Linien mit krummen bilden.

4) Ein Winkel wird durch eine gerade Linie getheilt, wenn man sie vom Scheitel aus zwischen beiden Schenkeln des Winkels in der nämlichen Ebene zieht; auf diese Weise ist (Fig. 9.) der gerade Winkel ABC durch die Linie BD in die Winkel ABD und DBC getheilt, welche deßhalb die beiden Theile des Winkels ABC sind.

5) Einige setzen den Buchstaben das Zeichen des Winkels (<) vor; ich werde mich anstatt dieses Zeichens des Wortes »Winkel« bedienen, und diesen auch öfters durch blosse drei Buchstaben bezeichnen.

6) Beim geraden Winkel darf man sich die beiden Schenkel, die in der Richtung einer geraden Linie liegen, zusammen nicht als eine einzige gerade Linie vorstellen, sondern man muß sich immer nach dem von dem geradlinigten Winkel aufgestellten Begriffe zwei gerade Linien denken, die in einem Punkte auf genannte Weise zusammenstoßen.

§. 8.

Nebenwinkel, und ihre Eintheilung in schiefe und rechte Winkel.

a) Wenn zwei Winkel einen Schenkel gemein haben, und die beiden anderen Schenkel in einer geraden Linie liegen, so heissen sie Nebenwinkel (Anguli contigui, anguli deinceps positi), wie (Fig. 9.) die Winkel ABD und DBC.

b) Sind die beiden Nebenwinkel ungleich, so heißt jeder davon (Fig. 9.) ein schiefer Winkel (Angulus obliquus).

c) Sind sie gleich, so heißt jeder von ihnen (Fig. 10.) ein rechter Winkel (Angulus rectus), und wird mit dem Buchstaben R bezeichnet.

d) Weil bei gleichen Nebenwinkeln der gemeinschaftliche Schenkel auf beiden Seiten zu den zwei übrigen Schenkeln die nämliche Neigung hat, so sagt man, daß derselbe auf die gerade Linie, welche die übrigen Schenkel bilden, senkrecht, perpendikulär, lothrecht, oder wie sich auch einige ausdrücken, neutral oder gerade aufstehe, wie (Fig. 10.) der Schenkel BD auf der Linie AC, weßhalb die Linie BD ein Loth oder Perpendikel (Linea normalis, vel perpendiculum) genannt wird.

I. Zusatz: Zwei Nebenwinkel liegen allemal in der nämlichen Ebene; denn (Fig. 9 und 10.) der Winkel ABD liegt in der nämlichen Ebene (§. 7. Zus. III.), und BC ist nach dem aufgestellten Begriffe von den Nebenwinkeln (ex def.) die Verlängerung von AB, und liegt also mit AB in der nämlichen Ebene (§. 4. Zus.), weßhalb die beiden Nebenwinkel ABD und DBC in der nämlichen Ebene sind.

II. Zusatz: Der gerade Winkel ABC (Fig. 9 und 10.) besteht aus den beiden Nebenwinkeln ABD und DBC, in die er durch den gemeinschaftlichen Schenkel BD getheilt wird; daher sind allemal zwei Nebenwinkel einem geraden Winkel gleich (Arithm. I. §. 10. Nro. 2); das heißt, ABD + DBC = ABC, oder kürzer x + y = ABC, und m + n = ABC.

III. Zusatz: Zwei Nebenwinkel zusammen sind immer zwei rechten Winkeln gleich. Sind die beiden Nebenwinkel gleich (Fig. 10.), so ist jeder davon ein rechter Winkel (ex def.), somit sind sie zusammen zwei rechten gleich, das ist, $m + n = 2R$; sind sie aber ungleich (Fig. 9.), so ist nach dem II. Zusatze $x + y = ABC$, und $m + n = ABC$, also $x + y = m + n = 2R$.

IV. Zusatz: Der gerade Winkel ist allemal gleich zwei rechten, und alle rechten Winkel sind, wie die geraden Winkel (§. 7. Zus. V.), einander gleich, da jeder die Hälfte eines geraden Winkels ist.

V. Zusatz: Alle Winkel, die in einer Ebene von einem gemeinschaftlichen Scheitel aus auf einer Seite einer geraden Linie möglich sind, sind zusammen so groß, wie zwei rechte Winkel; daher (Fig. 11.) ist $m + n + o = 2R$, weil diese Winkel zusammen den geraden Winkel ABC geben, und dieser zwei rechten gleich ist (Zus. IV.).

VI. Zusatz: Alle Winkel, die rings um einen Punkt in einer Ebene möglich sind, halten zusammen vier rechte Winkel; deßhalb (Fig. 11.) ist $m + n + o + p + q + r = 4R$.

Denn nach dem vorigen Zusatze ist

$$m + n + o = 2R,$$

und $p + q + r = 2R$, also (Arithm. I. §. 25. I.)

$$m + n + o + p + q + r = 4R.$$

VII. Zusatz: In dem geraden Winkel ist ein Schenkel gegen die beiden Seiten des anderen gleich geneigt; denn (Fig. 12.) nach der oberen Seite von AB ist die Neigung des Schenkels BC gleich CBE + EBA, und nach der unteren Seite = CBF + FBA, und beide Summen sind einander gleich.

VIII. Zusatz: Wenn zwei Winkel in einer Ebene einen Schenkel gemein haben, und zusammen zwei rechten gleich sind, so sind sie Nebenwinkel, das ist, dann liegen ihre beiden übrigen Schenkel in einer geraden Linie.

Wären (Fig. 12.) in dieser Voraussetzung die beiden Winkel ABD und DBC keine Nebenwinkel, so

müßte die Verlängerung von AB gegen BC hin ober dem Schenkel BC liegen, wie BE, oder unter demselben, wie BF.

Im ersten Falle wären ABD und DBE Nebenwinkel (ex def.), also

$$ABD + DBE = 2R,$$

und ex hyp. ist $ABD + DBC = 2R$, also (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.)

$$ABD + DBE = ABD + DBC,$$

und (Arithm. I. §. 34. I.) somit $DBE = DBC$.

Im zweiten Falle wären ABD und DBF Nebenwinkel, daher

$$ABD + DBF = 2R,$$

und ex hyp. ist $ABD + DBC = 2R,$

also $ABD + DBF = ABD + DBC,$

und $DBF = DBC.$

Beides ist aber unmöglich, weil die gleichen Winkel sich decken müssen (§. 7. Zus. IV.), und die Winkel DBE und DBC, dann DBF und DBC einander nicht gleich sind, außer es fallen die Verlängerungen BE und BF auf die Linie BC; es ist also BC die Verlängerung von AB, und die Winkel ABD und DBC sind Nebenwinkel, wenn sie den Schenkel BD gemein haben, und zusammen zwei rechten Winkeln in der nämlichen Ebene gleich sind.

§. 9.

Eintheilung der Winkel in hohle und erhabene, dann in spitzige und stumpfe Winkel.

a) Ein Winkel, der größer ist als ein gerader, oder größer, als zwei rechte Winkel zusammen, heißt ein erhabener Winkel (Angulus convexus).

b) Ein Winkel, der kleiner ist, als ein gerader, oder kleiner, als zwei rechte zusammen, heißt ein hohler Winkel (Angulus concavus); so ist (Fig. 6.) der Winkel x ein hohler, hingegen ABC auf der anderen Seite ein erhabener Winkel.

c) Ein hohler Winkel, der kleiner ist als ein rechter, heißt spitzig (Angulus acutus), und ein hoh-

ler Winkel, der größer ist, als ein rechter, heißt stumpf (Angulus obtusus); daher ist (Fig. 9.) der Winkel DBC spitzig, und ABD ist stumpf.

I. Zusatz: Eine gerade Linie, die mit einer anderen in einem Punkte zusammen stoßt, und mit ihr nicht in eine gerade Linie fällt, also ihr indirekt entgegengesetzt ist (§. 7. Anmerk. 1.), bildet mit ihr auf einer Seite einen hohlen, und auf der anderen einen erhabenen Winkel; auf diese Weise stoßen (Fig. 12.) die Linien AB und BE im Punkte B zusammen, und bilden auf einer Seite den hohlen Winkel $ABE = ABD + DBE$, und auf der anderen den erhobenen Winkel $ABE = ABF + FBE$, und durch beide Winkel, sowohl durch den hohlen als den erhabenen, ist die Lage der beiden geraden Linie AB und BE bestimmt.

II. Zusatz: Von zwei Nebenwinkeln ist jeder ein hohler Winkel; denn (Fig. 9.) es ist $x + y = 2R$, ferner $x < x + y$, und $y < y + x$, also $x < 2R$, und $y < 2R$.

III. Zusatz: Wenn von zwei Nebenwinkeln einer ein rechter Winkel ist, so ist der andere auch ein rechter Winkel, das ist, wenn (Fig. 10.) der Winkel $m = R$, so ist auch $n = R$, weil beide Nebenwinkel $m + n$ zwei rechten gleich sind (§. 8. Zus. III.).

IV. Zusatz: Wenn ein hohler Winkel ein rechter Winkel ist, so steht jeder Schenkel auf dem anderen senkrecht oder perpendikulär. Verlängert man (Fig. 10.) den Schenkel AB gegen B, so ist der Winkel n, den die Verlängerung BC mit BD bildet, auch ein rechter Winkel (Zus. III.), da m und n Nebenwinkel sind (§. 8. a.); mithin steht die Linie DB auf AC, also auch auf AB senkrecht.

V. Zusatz: Ist einer von zwei Nebenwinkeln stumpf, so ist der andere spitzig, und umgekehrt; das heißt (Fig. 9.), der Winkel y ist $< R$, wenn $x > R$, und $x > R$, wenn $y < R$, weil beide Winkel x und y zwei rechten Winkeln gleich sind (§. 8. Zus. III.).

VI. Zusatz: Von zwei schiefen Nebenwinkeln ist der größere stumpf, und der kleinere spitzig. Wäre (Fig. 9.) der größere Winkel x kein stumpfer Winkel,

so wäre er, da beide Nebenwinkel hohl sind (Zus. II.) ein rechter Winkel, oder ein spitziger; ist er ein rechter, so ist y auch ein rechter (Zus. III.), und diese beiden Winkel sind keine schiefen Winkel (§. 8. b.); ist hingegen x ein spitziger Winkel, also x < R, so ist der kleinere Winkel y auch < R, und x + y < 2R, was nicht möglich ist (§. 8. Zus. III.), also muß der größere Winkel x stumpf sein.

Ist aber einer von zwei Nbenwinkeln stumpf, so muß der andere spitzig sein (Zus. V.), somit ist der kleinere Nbenwinkel spitzig.

Anmerkung: Wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, so versteht man unter dem Worte Winkel allemal einen hohlen Winkel.

§. 10.

Scheitel= oder Vertikal=Winkel.

Wenn zwei Winkel einen Scheitel gemein haben, und die Schenkel des einen Winkels die verlängerten Schenkel des anderen sind, so nennt man sie Scheitelwinkel oder Vertikalwinkel (Anguli verticales); wie (Fig. 13.) die Winkel ABD und EBC, dann ABE und DBE, oder kürzer m und n, wie auch o und p, weil sie den Scheitel B gemein haben, und AB mit BC, dann DB mit BE in einer geraden Linie liegt.

I. Zusatz: Bei den Scheitelwinkeln sind die Schenkel des einen Winkels den Schenkeln des anderen direkt oder gerade entgegengesetzt (§. 7. Anm. 1.), und beide liegen in der nämlichen Ebene (§. 4. Zus.).

II. Zusatz: Wenn sich zwei gerade Linien schneiden, was nur in einem einzigen Punkte geschehen kann (§. 3. Zus. IV.), so erhält man Scheitelwinkel, welche den Durchschnittspunkt zum gemeinschaftlichen Scheitel haben. Dieselben bekommt man auch, wenn zwei gerade Linien in einem Punkte zusammen stoßen, und gegen diesen Punkt hin verlängert werden.

III. Zusatz: Zwei Scheitelwinkel sind einander gleich; denn (Fig. 13.) die Winkel m und o, dann o und n sind Nebenwinkel (§. 8. a.), daher (§. 8. Zus. III.)

m

$$\begin{array}{rl} & m + o = 2R, \\ \text{und} & o + n = 2R, \\ \hline \text{also} & m + o = o + n, \text{ und } m = n. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Eben so} & m + o = 2R, \\ \text{und} & m + p = 2R, \\ \hline \text{also} & m + o = m + p, \text{ und } o = p. \end{array}$$

Das heißt, die Scheitelwinkel m und n, wie auch o und p sind einander gleich.

IV. Zusatz: Wenn eine gerade Linie auf einer anderen geraden Linie perpendikulär steht, so ist auch ihre Verlängerung darauf senkrecht; das ist (Fig. 14.), wenn DB auf AC senkrecht steht, so ist auch BE auf AC perpendikulär, weil sich die Linien AC und DE im Punkte B schneiden, und die Scheitelwinkel m und n, dann o und p einander gleich sind (Zus. III.), und somit auch die zwei unteren Winkel p und n rechte Winkel sind (§. 8. c und d.).

§. 11.

Eintheilung des rechten Winkels in Grade, Minuten und Sekunden.

a) Der 90ste Theil eines rechten Winkels heißt ein Grad;

b) Der 60ste Theil eines Grades eine Minute; und

c) Der 60ste Theil einer Minute eine Sekunde.

d) Man bezeichnet Grade, Minuten und Sekunden dadurch, daß man rechts oben an die Zahlen die Zeichen (°, ', ") hinschreibt; so heißt z. B. 46°, 18', 36" eben so viel, als 46 Grad, 18 Minuten, 36 Sekunden (Arithm. I. §. 86. Nro. 6.).

I. Zusatz: Es hat also ein rechter Winkel 90 Grad; ein Grad hat ferner 60 Minuten, und eine Minute 60 Sekunden (Arithm. I. §. 10. Nro. 2.).

II. Zusatz: Der gerade Winkel (§. 8. Zus. IV.) hält 180°, ein erhabener Winkel (§. 9. a.) ist größer, und ein hohler (§. 9. b.) kleiner als 180°; ferner ein stumpfer Winkel ist größer, und ein spitziger (§. 9. c.) ist kleiner, als 90 Grad.

III. Zusatz: Zwei Nebenwinkel (§. 8. Zus. III.) halten zusammen 180°; man findet somit den einen, wenn man den anderen von 180° subtrahirt.

IV. Zusatz: Alle Winkel um einen Punkt auf einer Seite einer geraden Linie (§. 8. Zus. V.) halten zusammen 180°, und alle Winkel rings um einen Punkt (§. 8. Zus. VI.) in einer Ebene halten zusammen 360°.

V. Zusatz: Ein hohler Winkel ist mit seinem erhabenen Winkel (§. 9. Zus. I.) vier rechten gleich, und hält daher mit ihm 360°; man bekommt also den einen dieser beiden Winkel, wenn man den anderen von 360° abzieht.

Anmerkung: 1) Nach der neuen französischen Eintheilung wird der rechte Winkel in 100 Grad, ein Grad in 100 Minuten, und eine Minute in 100 Sekunden getheilt.

2) Einige Mathematiker theilen die Sekunde in 60 Terzen, andere dagegen in 10 Zehntel; die letztere Eintheilung findet man öfter als die erstere, im Falle man die Größe des rechten Winkels in kleineren Theilen, als in Sekunden, ausdrücken will.

3) Warum man den rechten Winkel auf diese Weise eintheilet, wird man in der Folge sehen, wenn von dem Maaße der Winkel die Rede ist.

§. 12.

Figur, dann ebene und krumme, wie auch geradlinigte, krummlinigte und vermischtlinigte Figur.

a) Eine Fläche, die nach allen Seiten hin völlig begränzt ist, heißt eine Figur.

b) Ist die begränzte Fläche eben (§. 4. a.), so heißt man sie eine ebene Figur;

c) Ist aber die Fläche krumm (§. 4. b.), so hat man eine krumme Figur.

d) Die ganze Gränze der Figur heißt ihr Umfang, Umriß oder Perimeter. Besteht dieser aus einer einzigen krummen Linie, so heißt er ihre Peripherie.

e) Besteht der Umfang der Figur aus mehreren Linien, so heissen die einzelnen Linien die Seiten

(Latera), und die Winkel dieser Seiten die Ecke der Figur.

f) Eine Linie von einem Ecke zum anderen, ohne daß sie mit einer Seite der Figur zusammenfällt, heißt eine Diagonallinie oder Diagonal.

Daher sind (Fig. 15.) die Linien AB, BC, CD, DE und EA, welche den Umfang oder Perimeter der Figur bilden, die Seiten; die Winkel A, B, C, D und E die Ecke, und die Linien AC und AD die Diagonalen dieser Figur.

g) Figuren heissen geradlinigt, wenn alle ihre Seiten gerade Linien sind, dann krummlinigt, wenn ihr Umfang aus einer oder aus mehreren krummen Linien besteht, und gemischtlinigt, wenn ihr Perimeter aus geraden und krummen Linien zugleich besteht.

I. Zusatz: Zwei gerade Linien geben keine Figur, weil sie sich nur in einem Punkte schneiden können, und also eine Fläche nie nach allen Seiten hin begränzen; daher gibt es keine geradlinigte Figur mit zwei Seiten, und eine solche muß wenigstens drei Seiten haben.

II. Zusatz: Eine geradlinigte Figur hat so viele Ecke oder Winkel, als sie Seiten hat. Es bildet (Fig. 15.) die erste Seite AB mit der zweiten Seite BC das erste Eck B, die zweite mit der dritten Seite das zweite Eck C, die dritte mit der vierten Seite das dritte Eck D, und so fortgesetzt, und am Ende die letzte Seite mit der ersten das letzte, das ist, die ^{n}te Seite mit der ersten das ^{n}te Eck.

III. Zusatz: Liegt von einer geraden Linie in der nämlichen Ebene ein Theil innerhalb, und ein Theil außerhalb einer ebenen Figur, so schneidet dieselbe wenigstens in einem Punkte den Umfang der Figur, weil alle Theile der geraden Linie, welche eine stätige Größe ist (Arithm. I. §. 2. g.), zusammen hängen, und deßhalb eine solche gerade Linie nothwendig durch den Umfang der Figur oder ihre Gränze gehen muß.

IV. Zusatz: Eine gerade Linie, die innerhalb einer ebenen Figur liegt, schneidet, an ihren beiden Endspunkten verlängert, ihren Umfang wenigstens in zwei Punkten, und, wenn die Figur geradlinigt ist, wenig-

stens zwei von ihren Seiten. Denn eine gerade Linie läßt sich nach beiden Seiten hin ohne Ende verlängern (§. 3. Zus. 1.), und es liegt nach jeder Seite hin ein Punkt von ihrer Verlängerung außerhalb der Figur; daher muß eine solche gerade Linie den Umfang der Figur wenigstens in zwei Punkten, und wenn diese geradlinigt ist, wenigstens zwei von ihren Seiten schneiden.

§. 13.

Dreieck, Viereck und Vieleck, wie auch reguläre und irreguläre, dann gleichnamige und ungleichnamige Figuren.

a) Rücksichtlich der Anzahl der Seiten oder Ecke wird eine ebene geradlinigte Figur ein Dreieck oder Triangel (Triangulum seu trigonum), ein Viereck (Tetragonum vel quadrilaterum), oder überhaupt ein Vieleck (Polygonum) genannt, je nachdem die Figur zu ihrer Gränze drei Seiten, oder vier, oder überhaupt mehr als vier Seiten hat, und also in ihr drei, vier, oder mehr als vier Ecke vorkommen.

b) In Absicht auf die Verhältnisse der Seiten und Winkel ist die geradlinigte Figur regulär, wenn in ihr alle Seiten einander, und zugleich alle Winkel unter sich gleich sind, und irregulär ist dieselbe, wenn in ihr entweder die Seiten, oder die Winkel, oder beide Stücke, Seiten und Winkel, ungleich sind.

c) Zwei oder mehrere geradlinigte Figuren heissen gleichnamig, wenn sie gleichviel Seiten haben; daher sind alle Dreiecke unter sich, eben so alle Vierecke, und eben so alle Vielecke von n Seiten gleichnamige Figuren.

Zählt man bei gleichnamigen Figuren von einer Seite an die übrigen in beiden nach einerlei Ordnung, so heissen jede zwei gleichvielsten Seiten in ihnen die gleichnamigen oder homologen Seiten (Latera homologa), und jede zwei Winkel, die von gleichnamigen Seiten eingeschlossen werden, heissen alsdann die gleichnamigen oder homologen Winkel (Anguli homologi); wenn man also (Fig. 56.) bei

den Seiten AB und ab anfängt zu zählen, so sind AB und ab, dann BC und bc, ferner CD und cd ꝛc. die gleichnamigen Seiten, und die Winkel A und a, dann B und b, ferner C und c ꝛc. die gleichnamigen Winkel.

Zählt man hingegen von einem Winkel zu den übrigen in einerlei Ordnung, so heissen jede zwei gleichvielsten Winkel gleichnamige oder homologe Winkel, und die Seiten, welche gleichnamige Winkel einschließen, gleichnamige Seiten.

II. Abschnitt.

Vom Kreise.

§. 14.

Kreis, dann dessen Zentrum, Halbmesser, Sehne, Durchmesser, Bogen und Zentrallinie.

a) Eine krumme Linie, welche eine Ebene nach allen Seiten hin so begränzt, daß alle gerade Linien aus ihr nach einem gewissen Punkte dieser Ebene einander gleich sind, heißt eine Kreislinie oder die Peripherie des Kreises (circumferentia, peripheria).

b) Die durch eine solche Begränzung erhaltene Figur nennt man Kreis oder Zirkel (Circulus), und die begränzte Ebene wird die Kreisebene oder Kreisfläche (Area circuli) genannt.

c) Der Punkt, von welchem alle Punkte der Peripherie gleich weit entfernt sind, ist der Mittelpunkt des Kreises (Centrum circuli).

d) Jede gerade Linie, welche vom Mittelpunkte bis zur Peripherie gezogen wird, heißt Halbmesser oder Radius (Radius).

e) Eine gerade Linie von einem Punkte der Peripherie bis zu einem andern Punkte derselben heißt Sehne oder Chorde (Chorda).

f) Geht die Sehne durch den Mittelpunkt des Kreises, so heißt sie Durchmesser (Diameter).

g) Jeder Theil der Kreislinie heißt ein Bogen derselben, oder ein Kreis- oder Zirkelbogen (Arcus), und jede gerade Linie, welche die Endspunkte eines solchen Bogens verbindet, die Sehne desselben.

h) Wenn in einer Ebene zwei Kreise verschiedene Mittelpunkte haben, so heißt die gerade Linie, welche die Mittelpunkte dieser Kreise verbindet, ihre Zentrallinie.

Daher ist (Fig. 16.) die krumme Linie AHGBQA die Kreislinie oder die Peripherie des Kreises, die von ihr eingeschlossene Ebene die Kreisebene, der Punkt C das Zentrum, die Linie AC oder CB ein Halbmesser oder Radius, die Linie FG eine Sehne, die Linie AB ein Durchmesser oder Diameter, der Theil der Kreislinie FHG ein Bogen dieses Kreises, und (Fig. 18.) die Linie BE die Zentrallinie der Kreise um B und E.

I. Zusatz: Eine gerade Linie, von welcher in der nämlichen Ebene ein Punkt innerhalb, und ein Punkt außerhalb der Kreislinie liegt, schneidet die Peripherie des Kreises wenigstens in einem Punkte (§. 12. Zus. III.).

II. Zusatz: Jeder Radius hat mit der Kreislinie nur einen Punkt gemein. Denn hätte (Fig. 16.) der Radius CB mit der Peripherie noch einen zweiten Punkt gemein, so müßte dieser entweder im Radius CB, wie z. B. der Punkt J, oder in seiner Verlängerung z. B. in P liegen, und es wäre nach dem von der Kreislinie aufgestellten Begriffe (§. 14. a.) im ersten Falle die Linie $CJ = CB$, dann im zweiten die Linie $CP = CB$, und beides ist unmöglich (Arithm. I. §. 10. Nro. 3.).

III. Zusatz: Jeder Durchmesser besteht aus zwei Radien, und hat mit der Kreislinie nur zwei Punkte gemein; weil er eine Sehne ist, welche durch das Zentrum des Kreises geht, und dieses innerhalb der Kreislinie liegt, und überdieß jeder Radius mit der Peripherie nur einen Punkt gemein hat (Zus. II.).

IV. Zusatz: Alle Radien eines Kreises sind einander gleich, und eben so alle Durchmesser eines Kreises, da jeder Durchmesser aus zwei Radien besteht (Zus. III.); deßwegen ist auch das Zentrum von allen Punkten der Kreislinie gleich weit entfernt.

V. Zusatz: Jede Sehne theilet den Kreis in zwei Theile, die auf verschiedenen Seiten der Sehne liegen.

VI. Zusatz: Ein Durchmesser des Kreises theilet die Kreislinie, und die Kreisebene in zwei kongruente Theile.

Man lege (Fig. 16.) den unteren Bogen AQB auf den oberen Bogen AHB, so haben sie mit einander den nämlichen Anfangspunkt A und den nämlichen Endspunkt B, und alle dazwischen liegenden Punkte des unteren Bogens fallen auf Punkte des oberen, weil sie sonst dem Mittelpunkte C näher, oder weiter davon entfernt sein müßten, als um den Halbmesser CB; daher decken sich diese beiden Bögen und sind kongruent, gleichwie es die beiden Theile der Kreisebene sind, nämlich AHB und AnB, weil ihre Gränzen genau zusammen fallen, und sie sich daher vollkommen decken (§. 1. Zus. I.).

VII. Zusatz: Der Durchmesser ist die größte Sehne. Denn (Fig. 61.) man nehme die Sehne AB an, welche kein Durchmesser ist, so liegt das Zentrum C nicht in ihr, und AB ist kleiner als AC + CB (§. 3. Zus. II.); der Durchmesser ist aber so groß, wie zwei Radien zusammen (Zus. IV.), daher ist der Durchmesser die größte Sehne.

Anmerkung: 1) Mit einem Instrumente, das ein Zirkel (Circinus) genannt wird, kann man immer in einer Ebene mit einem beliebigen Halbmesser um einen angenommenen Punkt eine Kreislinie beschreiben, indem man den einen Fuß des Zirkels in diesem Punkte, der das Zentrum wird, festsetzt, und den anderen bei der nämlichen Oeffnung, welche dem angenommenen oder bestimmten Halbmesser gleich ist, rings herum dreht, bis er wieder auf den ersten Punkt zurückkommt; deßwegen wird auch die Kreislinie von den griechischen Wörtern »περι — herum, und φερω — tragen« die Peripherie des Kreises genannt.

2) Die zwei gleichen Theile, in welche der Durchmesser die Kreislinie theilet, nennt man Semiperipherien.

§. 15.

I. Lehrsatz:

In einer Ebene ist durch das Zentrum und den Halbmesser die Kreislinie gegeben.

Beweis:

1) Wäre (Fig. 16.) um das Zentrum C beim gegebenen Halbmesser AC in der Ebene, in welcher die Kreislinie AHBQA liegt, noch eine zweite Kreislinie möglich, so müßte von ihr wenigstens ein Punkt nicht in jener Kreislinie liegen, weil man sonst nicht zwei verschiedene Kreislinien hätte;

2) Dieser Punkt liegt entweder innerhalb des ersten Kreises, wie J, oder außerhalb wie P; beides aber ist unmöglich, weil die Linie CJ verlängert in B durch die Kreislinie geht, wie die Linie CP; ferner ist $CJ < CB$, dann $CP > CB$, somit, da $CA = CB$, die Linie $CJ < CA$, und $CP > CA$, und deßhalb die Linien CJ und CP nicht mehr dem gegebenen Radius AC gleich wären;

3) Also ist in einer Ebene um das Zentrum C durch den Radius AC die Kreislinie gegeben, das ist, es gibt in dieser Ebene außer der Kreislinie AHBQA keine andere Kreislinie mehr, welche dieses Zentrum und diesen Halbmesser hat (§. 6.).

I. Zusatz: Alle Kreislinien, welche gleiche Radien haben, sind kongruent, weil die Zentra als Punkte einerlei (§. 2. Zus. V.), und gleiche Radien als gleich lange Linien (§. 3. Zus. V.) kongruent sind, und durch das Zentrum und den Radius die Kreislinie gegeben ist (§. 6. Anm. 1.).

II. Zusatz: Eben so sind alle Kreislinien, die gleiche Durchmesser haben, kongruent, weil die Radien die Hälften der Durchmesser sind (§. 14. Zus. III.), und dieselben durch die Radien bestimmt sind.

III. Zusatz: Durch den Radius oder den Durchmesser ist die Kreisfläche oder der Kreis selbst gegeben, da durch jeden die Kreislinie als die Gränze der Kreisebene gegeben ist (Zus. I. und II.), und deßhalb alle Kreise von gleichen Radien, oder von gleichen Durchmessern kongruent sind (§. 6.).

IV. Zusatz: Ein größerer Halbmesser gibt einen größeren Kreis, das ist, wenn (Fig. 17.) der Radius QC größer ist als (Fig. 16.) der Radius AC der beiderseits um C mit diesen Halbmessern beschriebenen Kreise, so sind, wenn man CS = AC macht, und mit CS um C bei Fig. 17. einen Kreis beschreibt, die Kreise AHBQA, und sxyzs kongruent (Zus. III.); nun ist QC > SC, folglich liegt der Kreis sxyzs ganz innerhalb QRTUQ, mithin ist die Kreisfläche QRTUQ > sxyzs, also auch QRTUQ > AHBQA, das heißt, der mit dem größeren Radius QC beschriebene Kreis ist größer, als der des kleineren Radius AC.

V. Zusatz: Gleiche Kreise haben gleiche Radien. Denn wäre der eine Radius größer als der andere, so wäre auch der eine Kreis größer als der andere (Zus. IV.); aus diesem Grunde sind auch alle gleiche Kreise kongruent (Zus. III.).

VI. Zusatz: Ein größerer Kreis hat auch einen größeren Halbmesser. Denn wären die Halbmesser gleich, so wären es auch die Kreise, und wäre der Halbmesser des größeren Kreises kleiner, so müßte der größere Kreis zugleich der kleinere sein, da doch beides gegen die Voraussetzung ist.

Anmerkung: 1) Was in den drei letzten Zusätzen dieses §. von den Radien gesagt wurde, gilt auch von den Durchmessern, weil jeder Radius die Hälfte des Durchmessers des nämlichen Kreises ist.

2) Will man von einem Punkte der Kreislinie einen Durchmesser ziehen, so zieht man vom gegebenen Punkte zum Zentrum eine gerade Linie, und verlängert sie auf der anderen Seite, bis sie die Kreislinie erreicht; die dadurch erhaltene Linie ist der verlangte Durchmesser.

§. 16.

Aufgabe, um einen Mittelpunkt in einer Ebene einen Kreis zu beschreiben, der eine unbegränzte gerade Linie in zwei Punkten schneidet.

Auflösung:

Soll die Kreislinie (Fig. 16.) um den Mittelpunkt C die gerade Linie ED von unbestimmter Größe in zwei Punkten schneiden, so nehme man in ED den beliebigen Punkt J an, ziehe die gerade Linie CJ, und beschreibe mit einer Oeffnung des Zirkels, die größer ist als CJ, eine Kreislinie, sie wird die unbestimmte gerade Linie DE in zwei Punkten schneiden.

Beweis:

1) Man verlängere die Linie CJ beiderseits bis zur Peripherie, so ist AB ein Durchmesser (§. 14. f.), und theile die Kreislinie in zwei gleiche Theile (§. 14. Zus. VII.), nämlich in die gleichen Kreisbögen AHB und AnB;

2) Von den beiden Endspunkten A und B des Diameters AB, die zugleich Punkte der Peripherie des Kreises sind, liegt der Punkt A diesseits, und der andere jenseits der geraden Linie DE;

3) Nun kann im Halbkreise AHB die Kreislinie von A nicht ununterbrochen nach H und B gehen, ohne die gerade Linie DE ober dem Durchmesser AB in einem Punkte m zu schneiden; eben so muß im anderen Halbkreise AQB die Kreislinie von B nach n und A die dazwischen liegende Linie in einem Punkte n unter dem Diameter AB schneiden;

4) Daher hat man jetzt um C eine Kreislinie verzeichnet, welche die unbestimmte gerade Linie DE in den zwei Punkten m und n schneidet.

1. Zusatz: Eine gerade Linie, die in der nämlichen Ebene einen Punkt innerhalb des Kreises hat, schneidet verlängert die Peripherie des Kreises in zwei Punkten.

Ist nämlich (Fig. 16.) der Punkt, welcher inner-

halb des Kreises liegt, im Mittelpunkte C, so ist die Linie verlängert ein Diameter (§. 14. f.), der offenbar die Kreislinie in zwei Punkten schneidet. Liegt aber der Punkt im Kreise außer dem Zentrum, wie es beim Punkte J der Linie DE der Fall ist, so ziehe man durch J den Durchmesser AB; nun liegt der eine Theil der Linie DE im Halbkreise AHB, und der andere im Halbkreise AQB, und weil jeder dieser Theile bis außer dem Kreise verlängert werden kann, schneidet die gerade Linie DE die Peripherie in den beiden Punkten m und n.

II. Zusatz: Die Kreislinie hat nur ein Zentrum, das ist, es gibt in der Kreisebene nur einen einzigen Punkt, von dem alle Punkte der Peripherie gleich weit entfernt sind. Denn (Fig. 16.) gäbe es außer C noch ein anderes Zentrum, so müßte es in der Kreisebene liegen (§. 14. a.); nimmt man nun an, daß auch der Punkt J ein Zentrum des Kreises ist, so muß die gerade Linie CJ verlängert die Peripherie in zwei Punkten schneiden (Zus. I.), was aber nicht möglich ist, da $BJ < BC$, dann $BC = CA$, also $BJ < CA$, und $CA < AJ$ ist, somit BJ kleiner als AJ wäre, weßhalb J kein Zentrum mehr dieses Kreises sein kann.

III. Zusatz: Wenn (Fig. 18.) ein Kreis um B einen Punkt D seiner Peripherie innerhalb, und einen Punkt A außerhalb des Kreises um E hat, so haben die beiden Kreislinien zwei Punkte m und n gemein, die auf verschiedenen Seiten der Sehne AD liegen. Denn verbindet man die beiden Punkte A und D durch eine gerade Linie, so erhält man die Sehne AD, welche die Kreislinie um B in zwei Theile schneidet, die auf verschiedenen Seiten derselben liegen (§. 14. Zus. V.); nun kann die Kreislinie um B vom Punkte D innerhalb des Kreises um E zum Punkte A außer diesem Kreise nicht stätig kommen, ohne auf jeder Seite der Sehne AD die Kreislinie um E in einem Punkte zu durchschneiden, das ist, beide Kreislinien haben auf einer Seite von AD den Punkt m, und auf der anderen den Punkt n gemein.

§. 17.

II. Lehrsatz:

Wenn von zwei Kreisen in einer Ebene ihre Radien und die Zentrallinie eine solche Länge haben, daß zwei von diesen Linien zusammen allemal größer sind, als die dritte einzeln, so haben die beiden Kreislinien zwei Punkte gemein, die auf verschiedenen Seiten der Zentrallinie liegen.

Beweis:

1) Man verlängere (Fig. 18.) die Zentrallinie BE (§. 14. b.) auf beiden Seiten bis an die Peripherien der Kreise, mithin bis A und F, so fallen die beiden Diameter AD und CF in eine gerade Linie mit der Zentrallinie (§. 3. Zus. ll.), und der Mittelpunkt des zweiten Kreises E kommt zwischen B und F zu liegen;

2) Nach der Voraussetzung ist

a) die Summe $EB + BA > EC$,

b) dann $BE + EF > BD$,

c) und $BD + CE > BE$;

3) Nach der ersten Voraussetzung bei Nro. 2. a. ist $EB + BA > EC$, oder da $EB + BA = EA$, es ist $EA > EC$, also liegt A als der Anfangspunkt des Durchmessers AD vom ersten Kreise außer dem zweiten Kreise um E;

4) Nach der zweiten Voraussetzung bei Nro. 2. b. ist $BE + EF > BD$, oder da $BE + EF = BF$, es ist $BF > BD$, also liegt der Punkt D als der Endspunkt des Durchmessers AD zwischen B und F;

5) Deßhalb kann der Punkt D mit E zusammen fallen, oder zwischen E und F liegen, oder auch zwischen B und E sein; fällt er mit E zusammen, oder fällt er zwischen E und F, so liegt er in beiden Fällen innerhalb des Kreises um E;

6) Liegt aber der Punkt D zwischen B und E, so kann er mit C zusammen fallen, oder zwischen C und B liegen, oder endlich zwischen C und E sein; die

beiden ersten Lagen sind aber wegen der gesetzten Bedingungen nicht möglich, weil gegen die Bedingung bei Nro. 2. c. in der ersten Lage $BD + CE = BE$, und in der zweiten Lage $BD + CE < BE$ wäre;

7) also liegt auch der Punkt D im dritten Falle (Nro. 5.) innerhalb des Kreises um E;

8) Liegt aber ein Punkt A von der Peripherie des ersten Kreises um B außerhalb, und ein anderer Punkt D von der Peripherie dieses Kreises innerhalb des Kreises um E, was bei Nro. 3. und dann von Nro. 4 — 7. gezeigt wurde, so schneiden sich die Kreislinien in zwei Punkten, die auf verschiedenen Seiten der Sehne AD liegen (§. 16. Zus. III.), somit auch auf verschiedenen Seiten der Zentrallinie BE sind (Nro. 1.).

Es schneiden sich also die beiden Kreise um B und E in den zwei Punkten m und n, welche auf verschiedenen Seiten der Zentrallinie BE liegen, wenn diese und die beiden Radien AB und EF, oder BD und CE eine solche Länge haben, daß allemal zwei von diesen Linien zusammen größer sind, als die dritte einzeln, das ist, wenn die Kreise um B und E in einer Ebene eine solche Größe und Lage haben, daß $EB + BA > EC$, dann $BE + EF > BD$, und $BD + CE > BE$.

I. Zusatz: Wenn die Radien der Kreise, die in einer Ebene liegen, und ihre Zentrallinie einander gleich sind, so schneiden sich die Kreislinien in zwei Punkten, wovon der eine ober, und der andere unter der Zentrallinie liegt.

Denn (Fig. 18.) wenn $AB = CE = BE$, so sind zwei von diesen Linien zusammen allemal größer als die dritte, d. h., dann ist $AB + CE > BE$, ferner $AB + BE > CE$, und $BE + CE > AB$, somit schneiden sich kraft des aufgestellten Lehrsatzes die beiden Kreislinien auf die angezeigte Weise.

II. Zusatz: Eben so schneiden sich die Kreislinien, wenn die Radien der Kreise einander gleich sind, und jeder davon größer ist, als die halbe Zentrallinie.

Denn (Fig. 18.) wenn $AB = CE$, und $AB > \frac{1}{2}BE$ somit auch $CE > \frac{1}{2}BE$, so ist

$$\begin{array}{lrl} \text{a)} & AB & > \frac{1}{2}BE, \\ \text{dann} & CE & > \frac{1}{2}BE, \\ \hline \text{also} & AB + CE & > BE; \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{ferner b)} & AB & = CE, \\ \text{dann} & BE & > 0, \text{ nach §. 14. h.} \\ \hline \text{also} & AB + BE & > CE, \end{array}$$ vermöge Arithm. I. §. 25. II.;

$$\begin{array}{lrl} \text{endlich c)} & CE & = AB, \\ \text{dann} & BE & > 0, \\ \hline \text{mithin} & CE + BE & > AB. \end{array}$$

Es haben also in dieser Voraussetzung die Radien und die Zentrallinie der Kreise wieder eine solche Größe, daß zwei von diesen Linien allemal größer sind als die dritte, weßhalb sich die Kreislinien nach dem aufgestellten Lehrsatze auf die angezeigte Weise schneiden müssen.

Anmerkung: Da die Kreislinie, wie die geradlinigten ebenen Figuren, den Gegenstand der Elementargeometrie ausmachen (Arithm. I. §. 7. b.), und der vorstehende Lehrsatz dieses §., wie man es bei der Aufgabe des §. 19. sehen wird, zur Konstruktion der Figuren nach der Triangulär-Methode nöthig ist, so muß er schon jetzt aufgestellt werden, um darnach zu erkennen, in wie ferne aus drei gegebenen geraden Linien Dreiecke, und mittels dieser geradlinigte ebene Figuren konstruirt werden können.

II. Hauptstück.

Von der Lage und Größe gerader Linien.

I. Abschnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien in Dreiecken.

§. 18.

Eintheilung der Dreiecke, in ungleichseitige, gleichschenklichte und gleichseitige Dreiecke.

Nach dem Verhältnisse der Größe der Seiten zu einander heißt ein Dreieck (§. 13. a.):

a) Ein ungleichseitiges Dreieck (Triangulum scalenum), wenn unter den drei Seiten des Dreieckes keine der anderen gleich ist, somit alle drei Seiten unter sich ungleich sind, wie (Fig. 19.) das Dreieck ABC; dann

b) Ein gleichschenklichtes Dreieck (Triangulum aequicrurum vel isoscelicum, aut isosceles), wenn nur zwei Seiten, die immer Schenkel des nämlichen Winkels sind, einander gleich sind, wie (Fig. 20.) das Dreieck ABC; und endlich

c) Ein gleichseitiges Dreieck (Triangulum aequilaterum), wenn alle drei Seiten einander gleich sind, wie (Fig. 21.) das Dreieck ABC.

d) Nimmt man eine Seite als die Basis oder Grundlinie an, so nennt man das gegenüberstehende Eck die Spitze des Dreieckes; ist daher (Fig. 21.) im Dreiecke ABC die Seite AC die Grundlinie, so ist B die Spitze des Dreieckes, und umgekehrt, wenn B die Spitze, so ist AC die Grundlinie des Dreieckes.

e) Im gleichschenklichten Dreiecke nimmt man gewöhnlich dasjenige Eck als Spitze an, das die gleichen

Seiten bilden, wo dann die opponirte Seite die Basis oder Grundlinie ist.

f) Eine gerade Linie, welche von der Spitze des Dreieckes auf die Grundlinie perpendikulär steht (§. 8. d.), heißt die Höhe des Dreieckes; daher ist (Fig. 37.) im Dreiecke ABC das Perpendikel BD, welches von der Spitze B auf AC gezogen ist, die Höhe des Dreieckes.

I. Zusatz: Die drei Ecke eines Dreieckes, das ist, die drei Schenkel der Winkel eines Dreieckes können nie in einer einzigen geraden Linie liegen, weil eine einzige gerade Linie die Fläche nicht nach allen Seiten hin begränzt, und zur Gränze eines geradlinigten Dreieckes, damit man eine Figur erhält, drei verschiedene gerade Linien erfordert werden (§. 12. Zus. I.).

II. Zusatz: In einem jeden solchen Dreiecke ist die Summe zweier Seiten allemal größer, als die dritte Dreiecks-Seite.

Denn die drei Ecke des Dreieckes liegen nicht in einer geraden Linie (Zus. I.); deßhalb bilden die zwei übrigen Seiten des Dreieckes zwischen den Endspunkten der dritten Seite eine gebrochene Linie (§. 3. c.), welche größer ist, als die dritte Dreiecks-Seite, die zwischen zwei Punkten die kürzeste Linie ist (§. 3. Zus. II.). Daher ist (Fig. 19.) die Summe $AB + BC > AC$, ferner $AB + AC > BC$, und $AC + BC > AB$, indem man bei drei Seiten dreimal zwei verschiedene Seiten in eine Summe verbinden kann (Arithm. IV. §. 94.).

III. Zusatz: Der Unterschied zweier Seiten ist in dem Dreiecke allemal kleiner, als die dritte Seite. Denn (Fig. 19.) nach dem II. Zusatze ist

$$AB + BC > AC,$$
dann $$BC = BC,$$
also $$AB > AC - BC$$ (Arithm. I. §. 34. II.).

Wie nun $AC - BC < AB$, so ist aus den nämlichen Gründen $BC - AB < AC$, und $AB - AC < BC$.

IV. Zusatz: In kongruenten Dreiecken stehen gleichen Seiten gleiche Winkel, und gleichen Winkeln glei-

gleiche Seiten entgegen, das ist (Fig. 21 und 22.), wenn △ ABC ≌ △ abc, so ist z. B., wenn AC = ac, der Winkel B und b, und umgekehrt, wenn B = b, so muß auch AC = ac sein, weil sich sonst die Dreiecke, wenn man sie so auf einander legt, daß die gleichen Winkel auf einander fallen, nicht vollkommen decken würden, und deßhalb auch dieselben nicht kongruent wären (§. 1. Zus. II.).

Was von den Seiten AC und ac, und den opponirten Winkeln B und b gesagt wurde, gilt aus dem nämlichen Grunde von den übrigen Seiten und Winkeln.

V. Zusatz: Liegt von einer geraden Linie in einer Ebene ein Punkt einerhalb eines Dreieckes, so wird sie, an ihren beiden Endspunkten verlängert, die Gränze oder den Perimeter des Dreieckes in zwei Punkten schneiden (§. 12. Zus. IV.), und somit wenigstens einen Schenkel eines jeden Dreieckswinkels berühren oder schneiden.

VI. Zusatz: Liegt von einer geraden Linie in der nämlichen Ebene ein Punkt innerhalb eines hohlen Winkels, so wird sie, an ihren beiden Endspunkten verlängert, wenigstens einen Schenkel dieses Winkels schneiden.

Denn wenn (Fig. 23.) von der Linie mn ein Punkt m innerhalb des hohlen Winkels ABC liegt, was man mittels einer vom Punkte m zum Scheitel B gezogenen geraden Linie erkennen kann (§. 7. Anm. 4.), so kann man die Schenkel BA und BC, ohne die Größe des Winkels zu verändern (§. 7. Zus. II.), beliebig über den gegebenen Punkt m hinaus verlängern, und dann die Oeffnung des Winkels durch eine gerade Linie AC so schliessen, daß der Punkt m innerhalb des Dreieckes ABC liegt; weßhalb die verlängerte Linie mn wenigstens einen Schenkel des Winkels ABC schneidet (Zus. V.).

Anmerkung: 1) Hier versteht man unter dem Worte Dreieck allemal ein geradlinigtes ebenes Dreieck, dessen Gränzen drei gerade Linien sind (§. 12. g.), weil von sphärischen oder Kugel-Dreiecken, welche von Bö-

gen der Kreislinien gebildet werden, noch nicht die Rede ist.

2) Das Dreieck bezeichnet man kurz mit diesem Zeichen (△).

3) Man sagt von Dreiecken:

a) Zwei Seiten schliessen einen Winkel ein, wenn sie im Dreiecke diesen Winkel bilden; daher schliessen (Fig. 20.) die Seiten AB und BC den Winkel B ein;

b) Ein Winkel liegt an einer Seite, oder ist ein anliegender Winkel, wenn die Seite ein Schenkel dieses Winkels ist; deßhalb sind (Fig. 20.) die beiden Winkel A und C zur Seite AC anliegende Winkel; und

c) Ein Winkel steht in einem Dreiecke einer Seite gegenüber oder entgegen, oder ist opponirter Winkel, wenn diese Seite nicht ein Schenkel dieses Winkels ist; weßhalb (Fig. 20.) der Winkel B zur Seite AC ein opponirter Winkel ist, gleichwie umgekehrt die Seite AC zum Winkel B eine opponirte Seite ist.

Im nämlichen Sinne ist bei Vierecken und bei geradlinigten Figuren überhaupt von den einer Seite anliegenden Winkeln, oder den einen Winkel einschliessenden Seiten die Rede.

4) Bei Dreiecken wird die Neigung jeder zwei Seiten zu einander durch den hohlen Winkel bestimmt; weßhalb bei ihnen nur hohle Winkel vorkommen (§. 9. b.).

§. 19.

I. Aufgabe, aus drei gegebenen geraden Linien, von welchen allemal zwei zusammen größer sind, als die dritte, ein Dreieck zu verzeichnen.

Auflösung:

1) Man nehme (Fig. 19.) eine der gegebenen Linien, z. B. die Linie AC, als Grundlinie an;

2) Aus A beschreibe man mit dem Halbmesser AB, und aus C mit dem Halbmesser CB Kreislinien (§. 14. Anm. 1.);

3) Diese Kreislinien, da die Basis AC ihre Zentrallinie ist, schneiden sich in zwei Punkten, die auf verschiedenen Seiten von AC liegen (§. 17.);

4) Zieht man nun von dem oberen Durchschnittspunkte B zu den Endspunkten der Linie AC die geraden Linien BA und BC, so hat man das verlangte Dreieck ABC, welches durch die drei gegebenen Linien AC, AB und BC gebildet wird.

I. Zusatz: Sind zwei der gegebenen Linien einander gleich, und wieder die Summen zweier Linien allemal größer, als die dritte Linie, so erhält man ein gleichschenklichtes Dreieck; wie (Fig. 20.) das Dreieck ABC, wo AC die Grundlinie, und AB = BC (§. 17. Zus. II.).

II. Zusatz: Sind alle drei der gegebenen Linien einander gleich, so erhält man das gleichseitige Dreieck (§. 17. Zus. I.); wie (Fig. 21.) das Dreieck ABC, wo AB = BC = AC.

III. Zusatz: Will man (Fig. 20.) über eine gegebene gerade Linie AC ein gleichschenklichtes Dreieck, z. B. das Dreieck ABC verzeichnen, so darf man nur mit Halbmessern, die einander gleich, aber größer als die Hälfte von AC sind, Kreise beschreiben, und vom oberen Durchschnittspunkte B die geraden Linien AB und BC ziehen (§. 17. Zus. II.).

Auf die nämliche Weise kann man in einer Ebene auch auf der anderen Seite einer geraden Linie über sie ein gleichschenklichtes Dreieck verzeichnen; wie dieses bei Fig. 30. der Fall ist, wo in einer Ebene über AC die beiden gleichschenklichten Dreiecke ABC und ADC gezeichnet sind, da AC die Grundlinie für beide Dreiecke ist.

Anmerkung: 1) Wenn nicht allemal zwei von den gegebenen geraden Linien zusammen größer sind, als die dritte einzeln, so läßt sich daraus kein Dreieck verzeichnen; weil zwei Seiten eines Dreieckes allemal größer sind, als die dritte (§. 18. Zus. II.), und sich die über die Endspunkte einer geraden Linie beschriebenen Kreislinien nur dann durchschneiden, wenn die Zentrallinie und die Radien eine solche Größe haben, daß zwei von diesen Linien zusammen immerhin größer sind, als die dritte (§. 17.).

2) Weil sich in dieser Voraussetzung die Kreislinien in zwei Punkten schneiden, die auf verschiedenen Sei-

ten der Zentrallinie liegen, so kann man das verlangte Dreieck in der nämlichen Ebene allemal über eine angenommene Basis auf beiden Seiten verzeichnen; wie dieses bei Fig. 18. der Fall ist, wo man aus den gegebenen Linien Bm, Em und BE über BE das obere Dreieck BmE, und das untere BnE verzeichnet hat, und dieses ebenfalls das verlangte Dreieck ist, da BE auch Basis dafür ist, und Bm = Bn, wie auch Em = En.

3) Will man nur die Durchschnittspunkte bestimmen, zu denen von der Basis aus die geraden Linien gezogen werden, um die verlangten Dreiecke zu erhalten, so beschreibt man nie die ganzen Kreislinien, sondern nur Bögen (§. 14. g.), so groß, daß sie sich wirklich schneiden.

§. 20.

I. Lehrsatz:

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gleich sind, so sind auch die übrigen Winkel mit der dritten Seite gleich, und die Dreiecke sind kongruent.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 21 und 22.) in den beiden Dreiecken ABC und abc die Seite AB = ab, dann BC = bc, und der eingeschlossene Winkel B = b;

2) Man lege die Dreiecke so auf einander, daß sich die gleichen Winkel B und b decken, somit der Punkt B auf b, dann die Seite AB auf ab, und BC auf bc fällt, da man gleiche Winkel allemal so auf einander legen kann, daß sie sich vollkommen decken (§. 7. Zus. IV.);

3) Weil nach der Voraussetzung AB = ab, und BC = bc, so muß auch A auf a, und C auf c fallen, indem sonst, da man die Dreiecke auf diese Weise auf einander legt, die Linien AB und ab, dann BC und bc nicht einander gleich sein könnten (§. 3 Zus. V.);

4) Durch die Endspunkte ist die Größe und Lage einer geraden Linie bestimmt (§. 3. Zus. III.), und

zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich (§. 3. Zus. II.); daher deckt AC die Linie ac, weil die Endspunkte dieser Linien nach Nro. 3. auf einander liegen, d. h., es ist AC = ac;

5) Weil A auf a, AB auf ab, und AC auf ac liegt, so deckt der Winkel A den Winkel a; ferner weil C auf c, CB auf cb, und CA auf ca liegt, so deckt der Winkel C den Winkel c, das ist, die Winkel A und a, dann C und c sind auch einander gleich (§. 7. Anm. 2.), oder A = a, und C = c.

6) Es sind also unter der gesetzten Bedingung die beiden Dreiecke ABC und abc kongruent, da alle Seiten und alle Winkel der Ordnung nach einander gleich sind, und sich somit die Dreiecke selbst vollkommen decken (§. 1. Zus. I.); das heißt, wenn AB = ab, BC = bc, und B = b, so ist auch AC = ac, A = a, und C = c, und △ ABC ≌ △ abc.

Zusatz: Durch zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel ist ein Dreieck vollkommen bestimmt; weil ein anderes Dreieck mit eben diesen Bestimmungen mit dem vorigen kongruent, mithin damit ganz einerlei ist, und deßhalb unter dieser Voraussetzung nur ein einziges Dreieck dieser Art möglich ist (§. 6.).

Aus diesem Grunde sagt man auch, daß ein Dreieck durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gegeben sei; das ist, durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ist auch die Größe der übrigen Winkel und der dritten Seite bestimmt, und diese letzteren Stücke lassen sich aus den gegebenen allemal durch Rechnung finden.

Anmerkung: Was so eben im Zusatze in Absicht auf den im Lehrsatze angeführten Fall von Dreiecken gesagt wurde, gilt von diesen in allen übrigen Fällen, wo ihre Kongruenz erwiesen wird, wie auch von Vierecken, und überhaupt von Vielecken, wenn man weiß, daß sie durch gewisse Stücke bestimmt oder gegeben sind (§. 6. Zus.).

§. 21.

II. Lehrsatz:

Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten einander gleich sind, so sind es auch die Winkel, die diesen Seiten gegenüber stehen.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 21.) im Dreicke ABC die Seite AB = BC;

2) Man verzeichne sich (Fig. 22.) ein anderes Dreieck abc so, daß ab = AB, dann bc = BC, und B = b;

3) Diese beiden Dreiecke sind, da sie zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich haben, kongruent (§. 20.), und deßhalb ist der Winkel A = a, und C = c;

4) Nach der Voraussetzung ist AB = BC, und ab ist = AB, und bc = BC (Nro. 2.), folglich ist AB = BC = ab = bc;

5) Man lege die beiden Dreiecke umgekehrt auf einander, oder schlage sie über einander, so daß bc auf AB fällt; in dieser Lage werden sich die gleichen Winkel B und b ebenfalls decken (§. 7. Anm. 2.), und die Seite bc deckt die Seite AB, gleichwie ab die Seite BC; weßhalb sich auch die Winkel a und C, dann c und A decken, und a = C, wie auch c = A ist;

6) Nach Nro. 3. ist der Winkel A = a, und C = c, und nach Nro. 5. ist der Winkel a = C, und c = A, daher ist (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.) der Winkel A = C, oder C = A.

Es sind also, wenn in einem Dreiecke zwei Seiten gleich sind, auch die opponirten Winkel gleich.

I. Zusatz: Im gleichschenklichten Dreiecke sind die beiden Winkel an der Grundlinie einander gleich; das ist (Fig. 20.), wenn AB = BC, so ist C = A.

II. Zusatz: Im gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel einander gleich. Denn wenn (Fig. 21.)

das Dreieck ABC gleichseitig ist (§. 18. c.), so ist AB = BC, also C = A, dann AB = AC, also C = B, endlich BC = AC, folglich A = B.

III. Zusatz: Das gleichseitige Dreieck ist eine reguläre Figur (§. 13. b.), weil in demselben alle Seiten einander gleich, und deßhalb auch alle Winkel unter sich gleich sind (Zus. II.).

§. 22.

III. Lehrsatz:

Wenn in zwei Dreiecken eine Seite, und die beiden anliegenden Winkel gleich sind, so sind es auch die beiden übrigen Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, und die Dreiecke sind kongruent.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 21 und 22.) in den beiden Dreiecken ABC und abc die Seite AC = ac, und der Winkel A = a, und C = c;

2) Man lege die Dreiecke so auf einander, daß die Seite AC die ihr gleiche Seite genau deckt, was bei gleichen geraden Linien allemal geschehen kann (§. 3. Zus. V.);

3) Weil der Winkel A = a, und C = c, und nach Nro. 2. die Seite AC auf ac, wie auch A auf a, und C auf c liegt, so muß auch in dieser Lage AB auf ab, und CB auf cb fallen, indem sich sonst die Winkel nicht decken würden, und deßwegen auch nicht gleich wären (§. 7. Anm. 2.);

4) Nun liegt der Punkt B in der Linie AB, mithin, da AB und ab auf einander liegen, auch in der Richtung von ab; und B liegt zugleich in der Linie CB, also auch in der Richtung von cb;

5) Daher liegt der Punkt B in jenem Punkte, wo die beiden Linien ab und cb einander schneiden, somit (§. 3. Zus. IV.) auf dem Punkte b;

6) Deßwegen decken sich die Linien AB und ab, wie auch bc und BC, weil nämlich ihre Endspunkte auf einander liegen (§. 20. Nro. 4.), und die Winkel B und b decken sich ebenfalls (§. 7. Anm. 2.).

Es sind also diese zwei Dreiecke, da sich der Ordnung nach alle ihre Seiten und Winkel, und sie sich somit selbst vollkommen decken, kongruent (§. 1. Zus. 1.).

Zusatz: Durch diese Seite und die beiden anliegenden Winkel ist ein Dreieck vollkommen bestimmt; denn ein anderes mit eben diesen Bestimmungen ist mit dem gegebenen kongruent, und es ist in dieser Voraussetzung nur ein einziges Dreieck dieser Art möglich (§ 6.).

Deßwegen sagt man auch, daß ein Dreieck durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sei (§. 20. Zus.).

Anmerkung: Die Richtigkeit des im Beweise dieses Lehrsatzes bei Nro. 5. Gesagten sieht man noch deutlicher ein, wenn man die Spitze des ersten Dreieckes, nämlich B, innerhalb des zweiten Dreieckes abc setzt, oder außer b in die Seite ab oder bc, oder endlich außer das Dreieck abc, wo dann die an der Grundlinie anliegenden Winkel A und a, wie auch C und c gegen die Voraussetzung nicht mehr gleich wären, da sie sich bei den auf einander gelegten Dreiecken nur in dem einzigen Falle decken, daß der Punkt B auf b fällt.

§. 23.

IV. Lehrsatz:

Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel gleich sind, so sind es auch die Seiten, die diesen Winkeln gegenüber stehen.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 23.) im Dreiecke ABC der Winkel BAC = ACB;

2) Wären die diesen Winkeln opponirten Seiten CB und AB einander nicht gleich, und somit ABC

kein gleichschenklichtes Dreieck, so läßt sich mit dem Halbmesser CB über AC gegen die Spitze B hin in der nämlichen Ebene ein gleichschenklichtes Dreieck verzeichnen, und dieses ist entweder das Dreieck ADC, wenn AB > BC, oder das Dreieck AEC, wenn AB < BC.

3) Im ersten Falle wäre AD = DC, somit der Winkel DAC oder BAC = DCA, und im zweiten wäre AE = CE, mithin der Winkel EAC oder BAC = ECA, weil im gleichschenklichten Dreiecke die beiden Winkel an der Grundlinie einander gleich sind (§. 21. Zus. I.);

4) Nach der Voraussetzung (Nro. 1.) ist aber der Winkel BAC = ACB, also wären die drei Winkel ACD, ACB und ACE einander gleich; dieses ist aber unmöglich, weil sich diese drei Winkel nicht decken, da sie doch in der nämlichen Ebene den Schenkel AC und den Scheitel C gemein haben (§. 7. Zus. IV. und Anm. 2.);

5) Folglich ist ABC das über AC mit dem Halbmesser BC verzeichnete gleichschenklichte Dreieck, und die Seiten AB und BC sind einander gleich; das ist, wenn der Winkel BAC = ACB, so ist CB = AB.

I. Zusatz: Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel gleich sind, so ist es ein gleichschenklichtes Dreieck; das ist (Fig. 20.), wenn A = C, so ist CB = AB.

II. Zusatz: Wenn in einem Dreiecke alle drei Winkel einander gleich sind, so sind auch alle drei Seiten unter sich gleich, und das Dreieck ist eine reguläre Figur (§. 13. b.); denn wen (Fig. 21.) alle drei Winkel einander gleich sind, so ist A = B, also BC = AC, ferner A = C, also BC = AB, endlich B = C, also AC = AB.

Anmerkung: Die Wahrheit dieses Lehrsatzes läßt sich auch auf die im §. 21. angezeigte Weise zeigen.

§. 24.

V. Lehrsatz:

Wenn in zwei Dreiecken der Ordnung nach alle Seiten gleich sind, so sind auch die Winkel der Ordnung nach gleich, und die Dreiecke sind kongruent.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 24, 25 und 26.) in den Dreiecken ABC und abc der Ordnung nach die drei Seiten des einen Dreieckes den drei Seiten des anderen gleich, somit AB = ab, dann BC = bc, und AC = ac;

2) Man lege in der nämlichen Ebene die beiden Dreiecke ABC und abc so neben einander, daß eine Seite z. B. BC die ihr gleiche Seite bc deckt, und verbinde die Punkte A und a, welche in dieser Lage nicht zusammen fallen, durch die gerade Linie Aa;

3) Der Punkt C oder c als der untere Endspunkt der Linien BC und bc kann jetzt eine dreifache Lage haben; er kann nämlich liegen

a) in der geraden Linie Aa, wie in der Figur 24., oder

b) in der gebrochenen Linie ACa unter der Linie Aa, wie in der Figur 25., oder endlich

c) in der gebrochenen Linie ACa ober der Linie Aa, wie in der Figur 26.

4) In der ersten Lage (Fig. 24.) bilden beide Dreiecke zusammen das Dreieck ABa, wo nach der Voraussetzung AB = ab, folglich nach §. 21. der Winkel a = A; ferner ist die Seite AC der Seite ac gleich (per hyp.), weßhalb die Dreiecke ABC und abc, da sie zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich haben, kongruent sind (§. 20.).

5) In der zweiten Lage (Fig. 25.) erhält man die gleichschenklichten Dreiecke ABa und ACa, wo die Seite AB = ab, und AC = ac (per hyp.), also der Winkel n = m, und p = o (§. 21.), somit n + p = m + o (Arithm. I. §. 25. I.), oder bac = BAC, weßhalb die Dreiecke ABC und abc kongruent sind,

da sie wieder zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich haben (§. 20.).

6) Endlich in der dritten Lage (Fig. 26.) erhält man das gleichschenklichte Dreieck ABa, wo AB = ab (per hyp.), also der Winkel BaA = BAa (§. 21.); ferner ist im gleichschenklichten Dreiecke ACa die Seite AC = ac (per hyp.), also der Winkel p = o; somit BaA — p = BAa — o (Arithm. I. §. 34. I.), oder n = m; weßhalb die Dreiecke ABC und abc auch in dieser dritten Lage, da sie, wie vorhin, zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich haben, kongruent sind (§. 20.).

Es sind also immer zwei Dreiecke kongruent, wenn die drei Seiten des einen Dreieckes der Ordnung nach den Seiten des anderen gleich sind, oder kürzer, wenn die Dreiecke alle Seiten gleich haben; das ist, wenn AB = ab, dann AC = ac, und BC = bc, so ist △ ABC ≌ △ abc.

Zusatz: Durch drei Seiten ist ein Dreieck vollkommen bestimmt oder gegeben; weil ein anderes Dreieck mit eben diesen Seiten mit dem gegebenen kongruent ist, und es in dieser Voraussetzung nur ein einziges Dreieck dieser Art gibt (§. 6.).

Anmerkung: Wenn man sagt, daß zwei Dreiecke alle Seiten gleich haben, und deßhalb kongruent sind, so ist es allemal so zu verstehen, daß die drei Seiten des einen Dreieckes der Ordnung nach den drei Seiten des anderen gleich sind, und somit nicht in dem Sinne, als wenn alle sechs Seiten ohne Unterschied unter sich gleich sein müßten.

§. 25.

II. Aufgabe, an eine gegebene gerade Linie mit einem bestimmten Scheitelpunkte einen Winkel zu verzeichnen, der einem anderen gegebenen gleich ist.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 27.) der Winkel ABC gegeben, und (Fig. 28.) an die Linie bc soll ein Winkel ver-

zeichnet werden, der dem gegebenen ABC gleich ist, und zum Scheitel den Punkt b hat;

2) Man beschreibe aus B mit einem beliebigen Halbmesser BC einen Kreisbogen, so groß, daß er die beiden Schenkel des gegebenen Winkels ABC schneidet (§. 19. Anm. 3.); es sind dann, wenn A und C die Durchschnittspunkte sind, die beiden Linien BC und BA einander gleich (§. 14. Zus. IV.);

3) Mit dem nämlichen Halbmesser, das ist, mit dem Radius bc = BC beschreibe man von b aus einen Kreisbogen ac, der wenigstens so groß ist, als der Bogen AC, was leicht mit dem blossen Auge bestimmt werden kann;

4) Endlich beschreibe man von c aus mit dem Halbmesser AC einen Kreisbogen, so groß, daß er den vorigen in einem Punkte a schneidet, und ziehe die gerade Linie ba, es ist dann an der Linie bc mit dem Scheitel b der Winkel abc der verlangte Winkel, welcher dem gegebenen Winkel ABC gleich ist.

Beweis:

1) Man verbinde in beiden Figuren die Endspunkte der Bögen AC und ac durch die geraden Linien AC und ac;

2) Weil AB = BC, so ist AB + AC > BC, dann BC + AC > AB, und AB + BC > AC, weßhalb auch die Linien ab, bc und ac, die den vorigen gleich gemacht wurden, eine solche Größe haben, das zwei von ihnen allemal zusammen größer sind, als die dritte einzeln, und aus ihnen kann das Dreieck abc verzeichnet werden (§. 19.);

3) Es ist die Linie bc = BC, und ac = AC (ex constr.); ferner ist ab = AB, weil beide Linien Radien von Kreisbögen sind, die mit den gleichen Halbmessern BC und bc beschrieben wurden;

4) Also sind die Dreiecke ABC und abc kongruent (§. 24.), und der Winkel abc = ABC, weil in kongruenten Dreiecken den gleichen Seiten ac und AC gleiche Winkel gegenüber stehen (§. 18. Zus. IV.)

Anmerkung: Weil beim geraden Winkel (§. 7. Zus. I.)

die beiden Schenkel zusammen in einer geraden Linie liegen, und alle geraden Winkel einander gleich sind (§. 7. Zus. V.), so bezieht sich vorstehende Auflösung immer auf Winkel, die nicht gerade Winkel sind.

§. 26.

III. Aufgabe, einen gegebenen Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung:

1) Um (Fig. 29.) den Winkel ABC zu halbiren, da ist, in zwei gleiche Theile zu theilen, beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser vom Scheitel B aus einen Kreisbogen, oder bestimme sich vielmehr nur damit in den Schenkeln des Winkels die beiden Durchschnittspunkte A und C, die vom Scheitel B gleich weit entfernt sind;

2) Mit einem Halbmesser, der größer ist als die Hälfte der geraden Linie, welche die Punkte A und C verbindet, beschreibe man auf der anderen Seite aus A und C Bögen, die sich in D schneiden (§. 17. Zus. II.);

3) Von B nach D ziehe man die gerade Linie BD, so theilet diese den gegebenen Winkel ABC in zwei Winkel ABD und DBC, die einander gleich sind.

Beweis:

1) Die Linie CD ist gleich der Linie AD (ex constr.); der Punkt D ist also von C und A gleich weit entfernt (§. 3. Zus. II.), und die Linie BD liegt zwischen BA und BC, weßhalb BD den Winkel ABC theilet (§. 7. Anm. 4.).

2) Bei der Auflösung dieser Aufgabe wurde die Linie BA = BC, und CD = AD gemacht, und DB = DB ist die gemeinschaftliche Seite der beiden Dreiecke ABD und BCD, daher sind diese kongruent (§. 24.), und die Winkel m und n sind einander gleich, oder ABD = DBC, da sie gleichen Seiten gegenüber stehen (§. 18. Zus. IV.).

Es theilet also die Linie BD den Winkel ABC in

die zwei gleichen Winkel ABD und DBC, und halbirt deßhalb den gegebenen Winkel.

Zusatz: Halbirt man auf's Neue jeden Theil m und n, so bekommt man nach der zweiten Halbirung 4 oder 2^2 gleiche Theile, nach der dritten 8 oder 2^3 gleiche Theile, nach der vierten Halbirung 16 oder 2^4, und überhaupt nach n Halbirungen 2^n gleiche Theile (Arithm. III. §. 69. a, b und f.).

§. 27.

IV. Aufgabe, eine gegebene gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung:

1) Es soll (Fig. 30.) die gerade Linie AC halbirt werden;

2) Man beschreibe in der nämlichen Ebene auf jeder Seite von AC ein gleichschenklichtes Dreieck (§. 19. Zus. III.), somit die Dreiecke ABC und ADC;

3) Man verbinde ihre Spitzen B und D durch die gerade Linie BD, so wird diese die gegebene gerade Linie AC im Punkte E halbiren, in welchem BD die Linie AC schneidet.

Beweis:

1) Weil man über und unter AC gleichschenklichte Dreiecke verzeichnete, so ist AB = BC, und AD = CD;

2) Da überdieß BD für die zwei Dreiecke BAD und BCD eine gemeinschaftliche Seite ist, und BD = BD, so sind diese Dreiecke kongruent (§. 24.), und der Winkel m ist dem Winkel n gleich (§. 18. Zus. IV.);

3) In den Dreiecken ABE und EBC ist AB = BC (ex constr.), dann BE ist eine gemeinschaftliche Seite für beide Dreiecke, und nach Nro. 2. ist der eingeschlossene Winkel m = n, also ist △ ABE ≌ △ EBC, und deßhalb AE = EC, das ist, durch die Linie BD ist die gegebene Linie AC im Punkte E halbirt worden, da AC durch BD im Punkte E geschnitten wird (§. 2. Anm. 5.), der von den beiden Endspunkten A und C gleich weit entfernt ist.

I. Zusatz: Weil in Gemäßheit des hier gegebenen Beweises das Dreieck ABE mit dem Dreiecke BEC kongruent ist, und also der Winkel p seinem Nebenwinkel r gleich ist, so ist jeder dieser Winkel ein rechter Winkel (§. 8. d.), und die gerade Linie BD, welche AC halbirt, steht zugleich auf AC senkrecht.

II. Zusatz: Bei der ersten Halbirung erhält man 2 oder 2^1 gleiche Theile, bei der zweiten 4 oder 2^2, bei der dritten 8 oder 2^3 gleiche Theile, und überhaupt wird eine gerade Linie durch n Halbirungen in 2^n gleiche Theile getheilt.

Anmerkung: Wenn man bei der vorstehenden Aufgabe ohne Beweisführung die gerade Linie halbiren will, so beschreibt man anstatt der gleichschenklichten Dreiecke unten und oben mit gleichen Halbmessern nur Bögen, in der Größe, daß sie sich schneiden (§. 19. Anm. 3.).

§. 28.

VI. Lehrsatz:

Wenn man in einem Dreiecke eine Seite verlängert, so ist der äußere Winkel, den die Verlängerung mit der anliegenden Dreiecks-Seite bildet, größer, als der im Dreiecke der verlängerten Seite gegenüber stehende Winkel.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 31.) im Dreiecke ABC die Linie CD die Verlängerung von AC, somit BCD der äußere Winkel, den CD mit der anliegenden Dreiecks-Seite CB bildet;

2) Man halbire im Punkte E die Linie BC (§. 27.), ziehe von A nach E die gerade Linie AE, verlängere diese bis F, so daß EF = EA, und ziehe von F nach C die gerade Linie FC;

3) Es ist BE = EC, und AE = EF (ex constr.), dann der Winkel E = e, weil diese Winkel Scheitelwinkel sind (§. 10. Zus. II. und III.), weßhalb die Dreiecke ABE und EFC kongruent sind (§. 20.), und

der Winkel $n = B$, weil diese Winkel den gleichen Seiten EF und AE gegenüber stehen (§. 18. Zus. IV.);

4) Der Punkt E liegt als der Mittelpunkt der Linie BC zwischen B und C, somit die Linie AE oder AF zwischen AB und AC oder AD, und der Punkt F liegt, weil man AE gegen diese Seite hin verlängerte, zwischen B und D, folglich CF zwischen CB und CD, und der Winkel BCD ist durch CF getheilt (§. 7. Anm. 4.);

5) Weil das Ganze größer ist, als nur ein Theil desselben (Arithm. I. §. 10. Nro. 3.), so ist der Winkel $BCD > n$, und nach Nro. 3. ist der Winkel $n = B$, weßhalb (Arithm. I. §. 10. Nro. 5.) der Winkel $BCD > B$, das ist, der äußere Winkel ist größer, als der der verlängerten Seite gegenüber stehende Dreiecks-Winkel.

I. Zusatz: Im Dreiecke ist der äußere Winkel größer, als jeder von den beiden inneren entgegengesetzten Dreiecks-Winkeln, von welchen nämlich keiner sein Nebenwinkel ist.

Man verlängere die Seite BC am Ecke C, so ist nach dem Lehrsatze der äußere Winkel $ACG > BAC$, ferner $ACG = BCD$ (§. 10. Zus. III.), also $BCD > BAC$, oder $BCD > A$, und es ist auch $BCD > B$, das ist, der äußere Winkel ist größer, als jeder der beiden inneren entgegengesetzten Winkel B und A.

II. Zusatz: Zwei Winkel in einem Dreiecke halten zusammen allemal weniger, als 180 Grad, oder sind kleiner, als zwei rechte Winkel.

Denn (Fig. 31.) ist BCD der äußere Winkel, so ist (Zus. I.)

$BCD > B$, und $BCD > A$,
dann $m = m$,
also $BCD + m > B + m$, und $BCD + m > A + m$,
ferner $BCD + m = 2R$ (§. 8. Zus. III.),
somit $B + m < 2R$, und $A + m < 2R$,
oder $B + C < 2R$, und $A + C < 2R$.

Wird die Seite CA am Ecke A verlängert, so zeigt man aus den nämlichen Gründen, daß auch $B + A < 2R$.

Weil

Weil man bei drei Winkeln dreimal zwei verschiedene Winkel in eine Summe verbinden kann (Arithm. IV. §. 94.), so sind zwei Winkel eines Dreieckes zusammen allemal kleiner, als zwei rechte Winkel, und deßhalb, da zwei rechte Winkel 180 Grad halten (§. 11. Zus. I.), auch kleiner als 180 Grad.

Aus diesem Grunde sind auch in einem Dreiecke alle Winkel hohl (§. 9. b.).

III. Zusatz: Wenn zwei gerade Linien, die in einem Punkte zusammen stoßen, von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, so ist der äußere Winkel größer, als der innere entgegengesetzte, und die beiden inneren Winkel zusammen sind weniger als 180 Grad.

Denn wenn (Fig. 31.) die im Punkte B zusammen stoßenden geraden Linien BA und BC in den Punkten A und C durch AD geschnitten werden, so erhält man das Dreieck ABC, wo nach dem Lehrsatze und dem vorigen Zusatze der Winkel $BCD > BAD$, und $BAC + ACB < 180°$, oder kürzer, $A + C < 180$ Grad.

IV. Zusatz: In jedem Dreiecke sind wenigstens zwei Winkel allemal spitzig.

Denn hätte das Dreieck zwei rechte oder zwei stumpfe Winkel, oder einen rechten und einen stumpfen Winkel zugleich, so hielten zwei solche Winkel 180 Grad, oder mehr als 180°, was nicht möglich ist, weil zwei Winkel eines Dreieckes allemal weniger als 180 Grad haben (Zus. II.).

V. Zusatz: Im gleichschenklichten Dreiecke sind beide Winkel an der Grundlinie spitzig, weil es sonst in einem Dreiecke, da diese Winkel einander gleich sind (§. 21. Zus. I.), zwei rechte oder zwei stumpfe Winkel gäbe, was nicht möglich ist (Zus. IV.).

VI. Zusatz: Der äußere Winkel ist spitzig, stumpf, oder ein rechter Winkel, je nachdem der anliegende Dreieckswinkel, der zu ihm ein Nebenwinkel ist (§. 8. a.), ein stumpfer, spitziger (§. 9. Zus. V.), oder ein rechter Winkel ist (§. 9. Zus. III.).

§. 29.

Eintheilung der Dreiecke in spitzwinklichte, stumpfwinklichte und rechtwinklichte Dreiecke.

In Absicht auf die Größe der Winkel heißt ein Dreieck

a) spitzwinklicht (Triangulum acutangulum), wenn alle drei Winkel spitzig sind, dann

b) stumpfwinklicht (Triangulum obtusangulum), wenn es einen stumpfen Winkel hat, und endlich

c) rechtwinklicht (Triangulum rectangulum), wenn dasselbe einen rechten Winkel hat.

Im rechtwinklichten Dreiecke heissen die Seiten, welche den rechten Winkel einschliessen, Perpendikel oder Katheten, und jene Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, heißt die Hypotenuse.

d) Uiberhaupt heissen die Dreiecke schiefwinklicht, wenn sie keinen rechten Winkel haben, und somit nicht rechtwinklicht sind.

Zusatz: Im rechtwinklichten und stumpfwinklichten Dreiecke sind allemal zwei Winkel spitzig (§. 28. Zus. IV.), in jenem ist der rechte, und in diesem der stumpfe Winkel der größte Winkel; und die schiefwinklichten Dreiecke sind entweder spitzwinklichte, oder stumpfwinklichte Dreiecke.

§. 30.

VII. Lehrsatz:

Im Dreiecke steht der größeren Seite der größere Winkel entgegen.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 32.) im Dreiecke ABC die Seite AC > AB;

2) Man trage die kleinere Seite AB von A aus auf AC auf, mache dadurch AD = AB, und ziehe die gerade Linie BD, man erhält das gleichschenklichte Dreieck ABD, wo der Winkel m = n ist (§. 21. Zus. 1.);

3) Weil nach Nro. 1. die Seite AC > A*B* ist (per hyp.), und A*B* = AD, so ist auch AC > AD, und der Punkt D liegt zwischen A und C, weßhalb die Linie *B*D den Dreieckswinkel A*B*C theilet, und der Winkel m, weil er nur ein Theil von *B* ist, ist kleiner als *B*, oder *B* > m;

4) Der Winkel n oder AD*B* ist in Absicht auf das Dreieck D*B*C ein äußerer Winkel, und deßhalb größer als der Winkel C (§. 28.), somit ist A*B*C größer als *B*DC oder *B* > C, da *B* > m, dann m = n, und n > C; das ist, im Dreiecke steht der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

I. Zusatz: Im Dreiecke steht dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber; das ist (Fig. 32.), wenn der Winkel *B* > C, so ist AC > A*B*.

Denn wäre AC = A*B*, so müßte auch der Winkel *B* = C sein (§. 21.), und wäre AC < A*B*, so müßte nach dem Lehrsatze *B* < C sein; beides ist aber gegen die Voraussetzung, also muß AC > A*B* sein, d. h., wenn *B* > C, so ist AC > A*B*.

II. Zusatz: Im Dreiecke steht der größten Seite der größte Winkel, und der kleinsten Seite der kleinste Winkel entgegen; und umgekehrt.

III. Zusatz: Im ungleichseitigen Dreiecke (§. 18. a.) ist kein Winkel dem anderen gleich, und umgekehrt ein Dreieck von lauter ungleichen Winkeln ist ungleichseitig.

IV. Zusatz: Im rechtwinklichten Dreiecke ist die Hypotenuse die größte Seite, und im stumpfwinklichten jene Seite, die dem stumpfen Winkel entgegen steht.

Anmerkung: Obgleich durch den vorstehenden Lehrsatz dieses §., und durch dessen I. Zusatz erwiesen ist, daß im Dreiecke der größeren Seite der größere Winkel, und dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber steht, so folgt daraus noch nicht, daß die Seiten mit ihren opponirten Winkeln, und diese mit jenen im geraden Verhältnisse stehen, und deßhalb mit der Zunahme der einen dieser Größen eben so die Zunahme der anderen verbunden sei (Arithm. II. §. 58. a.).

§. 31.

VIII. Lehrsatz:

Wenn in einer Ebene zwei Dreiecke eine Seite gemein haben, und die Spitze des einen innerhalb des anderen Dreieckes liegt, so ist der untere von den beiden, der gemeinschaftlichen Seite opponirten Winkeln größer, als der obere Winkel, und die Summe der beiden Seiten, welche den oberen Winkel einschließen, ist größer, als die Summe der Seiten, welche den unteren einschließen.

Beweis:

1) Es haben in der nämlichen Ebene (Fig. 33.) die beiden Dreiecke ABC und ADC die gemeinschaftliche Basis AC, und die Spitze D des Dreieckes ADC sei innerhalb des Dreieckes ABC;

2) Man verlängere AD, bis die Dreiecksseite BC in E geschnitten wird, dann ist D zum Dreiecke DEC ein äußerer Winkel, und m ist ein solcher für das Dreieck ABE, weßhalb $D > m$, und $m > B$ (§. 28.), folglich $D > B$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 7.), das ist, der untere Winkel D ist größer, als der obere B, welcher, wie D, der angenommenen Basis AC gegenüber steht.

3) Nach dem II. Zusatze des §. 18. ist ferner $AB + BE > AE$, und, da $AE = AD + DE$, auch

$$AB + BE > AD + DE,$$

dann $DE + EC > DC$, mithin (Arithm. I. §. 25. III.)

$$AB + BE + DE + EC > AD + DE + DC,$$

folglich $AB + BE + EC > AD + DC$,

oder $AB + BC > AD + DC$;

da man auf beiden Seiten die nämliche Linie DE subtrahirt (Arithm. I. §. 34. II.), und $BE + EC = BC$.

Es ist also die Summe der beiden Seiten, welche den oberen Winkel einschließen, größer, als die Summe der Seiten, welche den unteren Winkel bilden.

Zusatz: Nimmt man (Fig. 33.) innerhalb des Dreieckes A*B*C den Punkt D an, und zieht man zu den Endspunkten der als Basis angenommenen Seite AC die geraden Linien DA und DC, so ist nach dem aufgestellten Lehrsatze der Winkel ADC oder D > *B*, und A*B* + *BC* > AD + DC.

§. 32.

V. Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt einer geraden Linie ein Perpendikel zu ziehen.

Auflösung:

1) Ist (Fig. 34.) der gegebene Punkt ein Endspunkt, so verlängere man gegen *B* hin die gegebene Linie beliebig, etwa bis zu *C*;

2) Aus *B* schneide man auf der geraden Linie AC, auf welche durch den Punkt *B* ein Perpendikel errichtet werden soll, durch Hilfe des Zirkels mit einem beliebigen Halbmesser die gleichen Stücke *B*D und *B*E ab;

3) Man verzeichne über DE ein gleichschenklichtes Dreieck nach jener Seite hin (§. 19. Zus. III.), wo man das Perpendikel errichten will, somit das Dreieck DFE, wenn man von *B*D aus nach der oberen Seite von AC das Perpendikel ziehen will;

4) Vom Punkte F als der Spitze dieses Dreieckes ziehe man zu *B* die gerade Linie F*B*, so ist diese vom Punkte *B* aus das verlangte Perpendikel auf die gerade Linie AC, oder auf die Linie A*B*.

Beweis:

1) Die Linie D*B* ist = BE, dann DF = EF (ex constr.), und BF = BF, also △ DBF ≌ △ FBE (§. 24.);

2) In kongruenten Dreiecken stehen gleichen Seiten gleiche Winkel entgegen (§. 18. Zus. IV.), weßhalb m = n, da DF = EF;

3) Die beiden gleichen Winkel m und n sind Nebenwinkel (§. 8. a.), da BF ihr gemeinschaftlicher Schenkel, und DB und BE Theile der nämlichen geraden Linie AC sind;

4) Daher ist BF vom Punkte B auf AC, und deßhalb auch auf AB das verlangte Perpendikel (§. 8. d.).

I. Zusatz: Wird (Fig. 34.) die Linie FB gegen die untere Seite von AC verlängert, und an den neuen Endspunkt q hingeschrieben, so erhält man durch den nämlichen Punkt B auf dieser Seite in der nämlichen Ebene das Perpendikel BQ, weil die Verlängerung von FB auch auf AC senkrecht ist (§. 10. Zus. IV.).

II. Zusatz: Durch einen Punkt einer geraden Linie gibt es auf jeder Seite der Linie in einer Ebene nur ein Perpendikel.

Denn gäbe es (Fig. 34.) von B auf der oberen Seite von AC auch das Perpendikel BG, so wäre der Winkel FBC = GBC, da jeder von ihnen ein rechter Winkel wäre (§. 8. c. und d.); dieses ist aber nicht möglich, weil sich diese Winkel nicht decken, da sie doch in der nämlichen Ebene so auf einander liegen, daß sie den Scheitel B und den Schenkel BC gemein haben (§. 7. Zus. IV. und Anm. 2.).

Um deßwillen kann in einer Ebene auf AC vom Punkte B auf der oberen Seite nur BF, und auf der unteren nur BQ senkrecht sein.

Anmerkung: Will man ohne Beweisführung nur (Fig. 34.) das Perpendikel BF errichten, so beschreibe man zur Bestimmung des Punktes F mit dem Halbmesser DF = FE Bögen so groß, daß sie sich schneiden (§. 19. Anm. 3.), ohne daß man auch wirklich die geraden Linien DF und FE zieht.

§. 33.

VI. Aufgabe, von einem bestimmten Punkte außerhalb einer gegebenen geraden Linie auf sie ein Perpendikel zu errichten.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 35.) die Linie AC gegeben, und auf sie vom Punkte B ein Perpendikel zu errichten;

2) Man nehme in der Linie AC einen beliebigen Punkt H, und beschreibe aus B mit einem Halbmesser, der größer als BH ist, eine Kreislinie, oder bestimme

vielmehr nur die Punkte E und F, in welchen die Kreislinie die gerade Linie *AC* schneidet (§. 16.);

3) Uiber EF errichte man auf der anderen Seite von *B* das gleichschenklichte Dreieck EDF (§. 19. Zus. III.);

4) Man ziehe von *B* nach D die gerade Linie *BD*, so ist diese das verlangte Perpendikel.

Beweis:

1) Es ist nach Nro. 2 und 3. die Linie *EB* = *BF*, dann ED = FD, und *BD* = *BD*, mithin △ BED ≌ △ BFD (§. 24.), und deßhalb der Winkel m = n (§. 18. Zus. IV.);

2) Da m = n, ferner *BE* = *BF*, und *BG* = *BG*, so ist △ EBG ≌ △ GBF (§. 20.), und der Winkel p = q;

3) Die Winkel p und q sind Nebenwinkel, da sie den Schenkel G*B* gemein haben, und EG und GF Theile der nämlichen geraden Linie *AC* sind; deßwegen ist jeder der Winkel p und q ein rechter Winkel (§. 8. c.), und *BG* oder *BD* steht von dem außerhalb der Linie *AC* gegebenen Punkte *B* aus auf diese Linie perpendikulär.

I. Zusatz: Von einem Punkte außer einer Linie gibt es auf diese nur ein Perpendikel.

Denn gäbe es (Fig. 35.) noch ein zweites Perpendikel, etwa *BE*, so wäre der Winkel BEG oder E ein rechter Winkel, gleichwie es p ist, somit wäre E + P = 2R, was nicht möglich ist (§. 28. Zus. II.).

II. Zusatz: Das Perpendikel ist die kürzeste Linie, die von einem Punkte auf eine andere gerade Linie gezogen wird. Denn (Fig. 35.) jede andere gerade Linie, z. B. die Linie *BE*, ist größer, als das Perpendikel *BG*, weil sie im rechtwinklichten Dreiecke EBG die Hypotenuse ist (§. 30. Zus. IV.); deßwegen nennt man auch das Perpendikel *BG* den Abstand, die Distanz oder die Entfernung des Punktes *B* von der geraden Linie *AC*.

III. Zusatz: Man erhält allemal die Höhe des Dreieckes (§. 18. f.), wenn man von der Spitze des Dreieckes auf die Grundlinie ein Perpendikel zieht,

welches zugleich die Entfernung der Spitze von der Grundlinie angibt (Zus. II.).

IV. Zusatz: Wenn zwei oder mehrere Dreiecke eine gemeinschaftliche Spitze haben, und ihre Grundlinien neben einander in einer einzigen geraden Linie liegen, so haben sie alle eine gemeinschaftliche Höhe.

Daher haben (Fig. 36.) die Dreiecke EBF, FBG, GBH und BHM die gemeinschaftliche Höhe BH, weil sie alle die gemeinschaftliche Spitze B haben, und ihre Grundlinien EF, FG, GH und HM neben einander in der geraden Linie AC liegen (Zus. I.).

V. Zusatz: Wenn man (Fig. 36.) in der geraden Linie DH, welche im Punkte H auf die gerade Linie AC perpendikulär steht, einen beliebigen Punkt B annimmt, und in der Linie AC zwei Punkte F und M bestimmt, welche vom Punkte H gleich weit entfernt sind, so sind die geraden Linien BF und BM, die von B nach F und M gezogen werden, einander gleich, und bilden mit der Linie AC gegen das Perpendikel hin zwei Winkel q und x, die spitzig und einander gleich, und auf der anderen Seite zwei Winkel p und y, welche stumpf und ebenfalls einander gleich sind.

Denn der Winkel t ist $= u$, weil BH auf AC perpendikulär ist, dann $HF = HM$ (ex constr.), und $BH = BH$, also $\triangle BHF \cong \triangle BHM$ (§. 20.), und $BF = BM$, wie auch $q = x$ (§. 18. Zus. IV.), und die Winkel q und x sind spitzig, weil in den rechtwinklichten Dreiecken BFH und BHM die Winkel t und u die rechten Winkel sind (§. 29. Zus.); ferner p und q, wie auch x und y sind Nebenwinkel (§. 8. a.), und deßhalb p und y, da q und x spitzig sind, stumpfe Winkel (§. 9. Zus. V.); überdieß ist

$$\left.\begin{array}{r} p + q = 2R, \\ \text{und } x + y = 2R, \end{array}\right\} \text{(§. 8. Zus. III.)}$$

$$\text{also } p + q = x + y,$$

$$\text{dann } q = x,$$

$$\text{folglich } p = y.$$

Das heißt, wenn DH auf AC perpendikulär ist, und $HF = HM$, so ist $BF = BM$, dann $q = x$,

und p = y, während jene Winkel spitzig, und diese stumpf sind.

VI. Zusatz: Wenn DH auf *A*C senkrecht steht, und *B*E vom Perpendikel weiter absteht, als *B*F, somit HE > HF, so ist *B*E > *B*F, hingegen der Winkel m < q.

Denn das Dreieck BFH ist wegen des rechten Winkels bei H rechtwinklicht, und deßhalb der Winkel q spitzig (§. 29. Zus.), daher p stumpf (§. 9. Zus. V.), und im Dreiecke BEF ist die Seite *B*E > *B*F (§. 30. Zus. IV.).

Ferner ist q zum Dreiecke BEF ein äußerer Winkel, und deßhalb größer als m (§. 28.); folglich m < q.

VII. Zusatz: Und umgekehrt, wenn (Fig. 36.) *B*G dem Perpendikel *B*H näher liegt, als *B*F, somit GH < HF, so ist *B*G < *B*F, und hingegen s > q.

Denn der Winkel s ist im rechtwinklichten Dreiecke BGH wegen des rechten Winkels bei H spitzig, und daher sein Nebenwinkel r stumpf, und *B*G < *B*F; ferner ist s als der äußere Winkel größer, als q.

VIII. Zusatz: a) Wenn man (Fig. 36.) beim rechten Winkel DHC vom beliebigen Punkte *B* des Schenkels DH auf den anderen Schenkel HC oder seine Verlängerung, somit auf *A*C, ein Perpendikel zieht, so fällt es mit DH in eine Linie zusammen, und berührt deshalb den Schenkel HC im Punkte H; weil von *B* auf die gerade Linie *A*C, in welcher HC liegt, nur ein einziges Perpendikel möglich ist (Zus. I.), und beim rechten Winkel ein Schenkel auf den anderen perpendikulär steht (§. 9. Zus. IV.).

b) Zieht man (Fig. 36.) beim spitzigen Winkel BGC von einem beliebigen Punkte *B* des Schenkels *B*G auf den anderen Schenkel GC oder seine Verlängerung, somit auf *A*C, das Perpendikel *B*H, so liegt es innerhalb des spitzigen Winkels BGC.

Denn wenn BGC spitzig, so ist sein Nebenwinkel BGA stumpf (§. 9. Zus. V.), und das Perpendikel *B*H kann weder mit *B*G zusammen fallen, weil *B*G mit

*A*C schiefe Winkel bildet (per hyp.), noch auf die Verlängerung von CG gegen A hin, etwa auf *B*F fallen, weil es sonst ein Dreieck BFG gäbe, wo ein stumpfer, und zugleich ein rechter Winkel wäre, was nicht möglich ist (§. 29. Zus.); deßhalb muß das Perpendikel *B*H gegen C hin den Schenkel GC schneiden, und somit innerhalb des spitzigen Winkels BGC liegen.

c) Zieht man endlich (Fig. 36.) beim stumpfen Winkel BGA von einem beliebigen Punkte *B* des Schenkels *B*G das Perpendikel *B*H auf den anderen Schenkel G*A*, oder auf dessen Verlängerung GC, somit auf *A*C, so fällt es außerhalb des stumpfen Winkels BGA auf die Verlängerung GC. Denn der Winkel BGA ist stumpf (per hyp.), also sein Nebenwinkel BGC spitzig (§. 9. Zus. V.), und vom Punkte *B* gibt es auf *A*C nur ein Perpendikel, deßhalb liegt *B*H inner BGC, und fällt außerhalb des stumpfen Winkels BGA auf die Verlängerung GC.

IX. Zusatz: Wenn man demnach in einem Dreiecke von der Spitze auf die Grundlinie die Höhe zieht (Zus. III.), so fällt die Höhe

a) innerhalb des Dreieckes, wenn der Grundlinie zwei spitzige Winkel anliegen, wie (Fig. 36.) beim Dreiecke FBM die Höhe *B*H, weil die Winkel q und x spitzig sind;

b) Die Höhe fällt mit einer Dreiecksseite zusammen, wenn an der Grundlinie ein rechter Winkel ist, wie (Fig. 36.) beim Dreiecke BHM die Höhe *B*H, weil der Winkel BHM = R; endlich

c) fällt die Höhe außerhalb des Dreieckes auf die Verlängerung der Basis, wenn an der Grundlinie ein stumpfer Winkel ist, wie (Fig. 36.) beim Dreiecke BFG die Höhe *B*H, weil r ein stumpfer Winkel ist.

Anmerkung: Mechanisch kann man auch auf dem Papier auf verschiedene Weisen von gewissen Punkten auf gerade Linien Perpendikel ziehen; z. B. mittels eines Triangels aus Holz oder Messing, oder durch das Winkelmaaß, das aus zwei zu einem rechten Winkel mit einander verbundenen Regeln besteht.

§. 34.

IX. Lehrsatz:

Durch zwei Seiten, nebst dem Winkel, der der größeren Seite gegenüber steht, ist ein Dreieck vollkommen bestimmt.

Beweis:

Der Winkel, welcher der größeren Seite gegenüber steht, kann ein rechter, oder ein stumpfer, oder endlich ein spitziger Winkel sein.

a) Ist (Fig. 36.) im Dreiecke BFH die Seite BF und BH, und der rechte Winkel H oder t gegeben, welcher der Seite BF entgegen steht, die nach der Voraussetzung und wegen des opponirten rechten Winkels größer ist als BH, so ist, wenn BH zur Basis genommen wird, die Lage der Spitze F gegeben, da jede andere von B nach AC gezogene gerade Linie, die dem Perpendikel näher läge, kleiner (§. 33. Zus. VII.), und jede mehr entfernte größer wäre, als die gegebene Linie BF (§. 33. Zus. VI.); durch die Lage der Punkte F und H, welche die Endspunkte der Linie HF sind, ist die Größe der Linie HF, und somit wegen der zum Voraus schon gegebenen Seiten BF und BH das Dreieck BFH selbst vollkommen bestimmt (§. 24. Zus.).

b) Ist (Fig. 36.) im Dreiecke BFE nebst dem stumpfen Winkel p die opponirte Seite BE und die anliegende BF gegeben, so ist nach der Voraussetzung und wegen des opponirten stumpfen Winkels BE > BF; nimmt man nun BF zur Basis, so ist, wie vorhin, die Lage der Spitze E gegeben, und das Dreieck BFE ist durch die gegebenen Stücke wieder vollkommen bestimmt.

c) Ist endlich (Fig. 36.) der gegebene Winkel x spitzig, und von den gegebenen Seiten BE und BM im Dreiecke BEM erste Seite BE > BM, und man nimmt abermal BM zur Basis, so ist wieder die Lage der Spitze E gegeben, weßhalb auch in diesem Falle das Dreieck BEM vollkommen bestimmt ist.

I. Zusatz: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn

sie zwei Seiten gleich haben, nebst dem Winkel, der der größeren Seite gegenüber steht (§. 6.).

II. Zusatz: Zwei rechtwinklichte Dreiecke sind kongruent, wenn sie ein Perpendikel und die Hypotenuse gleich haben, da diese die größere Seite ist (§. 30. Zus. IV.), und ihr der rechte Winkel, welcher allemal 90 Grad hat (§. 8. Zus. IV. und §. 11. Zus. I.), gegenüber steht.

§. 35.

X. Lehrsatz:

Für zwei gegebene Seiten und den gegebenen Winkel, der der kleineren von diesen zwei Seiten gegenüber steht, sind zwei Dreiecke möglich, wo der Winkel, der der größeren Seite gegenüber liegt, in dem einen Dreiecke stumpf, und in dem anderen spitzig ist.

Beweis:

1) Die gegebene größere Seite (Fig. 36.) sei BE, und der gegebene Winkel, welcher der kleineren Seite entgegen steht, sei der Winkel BEC;

2) Dieser Winkel ist spitzig, weil sonst der Winkel, der im Dreiecke der größeren Seite BE opponirt ist, ein stumpfer sein müßte (§. 30.), wenn BEC ein rechter oder stumpfer Winkel wäre, was nicht möglich ist (§. 28. Zus. IV.);

3) Man errichte von B auf EC das Perpendikel BH, so fällt dieses innerhalb des spitzigen Winkels (§. 33. Zus. VIII. b.);

4) Man ziehe zwischen E und H von einem beliebigen Punkte F des Schenkels EC zu B die gerade Linie BF, so ist diese, da sie dem Perpendikel B näher liegt als BE (ex constr.), kleiner als die Linie BE (§. 33. Zus. VII.), was auch aus dem ersichtlich ist, daß der Winkel q im rechtwinklichten Dreiecke BHF spitzig (§. 29. Zus.), somit sein Nebenwinkel p stumpf (§. 9. Zus. V.), und deßhalb BE größer als BF ist (§. 30. Zus. IV.);

5) Man setze die kleinere der gegebenen Seiten sei = BF, so ist BEF das eine mögliche Dreieck, wo die gegebenen Seiten BE und BF nebst dem Winkel BEC oder BEF (§. 7. Zus. II.) vorkommen, welcher der kleineren Seite BF gegenüber steht;

6) Man beschreibe von B aus mit dem Halbmesser BF, welcher größer als BH ist (§. 30. Zus. IV.), eine Kreislinie, welche die Linie EC auch noch im Punkte M auf der anderen Seite des Perpendikels schneiden wird (§. 16.), oder bestimme sich vielmehr nur in der Linie EC den Punkt M, von dem man nach B die gerade Linie MB zieht, welche der Linie BF gleich ist (§. 14. Zus. IV.), während auch im gleichschenklichten Dreiecke BFM an der Grundlinie FM die beiden Winkel q und x einander gleich sind (§. 21. Zus. I.);

7) Man hat jetzt das zweite mögliche Dreieck BEM, wo die gegebenen Seiten BE und BF, da letztere = BM, und der gegebene Winkel BEC oder BEM vorkommen;

8) Endlich ist im Dreiecke BEF der Winkel p, welcher der größeren Seite BE opponirt ist, stumpf (Nro. 4.), und im Dreiecke BEM der Winkel x, welcher der nämlichen Seite BE gegenüber steht, spitzig, weil das Dreieck BFM gleichschenklicht ist, und da beide Winkel an der Grundlinie spitzig sind (§. 28. Zus. V.).

Also sind bei zwei gegebenen Seiten und dem Winkel, der der kleineren dieser zwei Seiten gegenüber steht, zwei verschiedene Dreiecke möglich, wo diese Stücke vorkommen, und der der größeren Seite opponirte Winkel ist in dem einen Dreiecke stumpf, und in dem anderen spitzig.

I. Zusatz: Durch zwei Seiten nebst dem Winkel, der der kleineren Seite entgegen steht, ist ein Dreieck nicht vollkommen bestimmt (§. 6.); weil es (Fig. 36.) in dieser Voraussetzung zwei verschiedene Dreiecke BEF und BEM gibt, die nicht gleiche Quantität und Qualität haben, und deßhalb auch nicht kongruent sind.

II. Zusatz: Die beiden Winkel p und x, welche (Fig. 36.) in den Dreiecken BEF und BEM der gemeinschaftlichen größeren Seite BE opponirt sind, betragen zusammen zwei rechte Winkel oder 180 Grad.

Denn p und q sind Nebenwinkel (§. 8. a.), also p + q = 180 Grad (§. 11. Zus. III.); ferner ist q = x, weil das Dreieck FBM gleichschenklicht ist (§. 21. Zus. I.), also p + x = 2R = 180 Grad (Arithm. I. §.10. Nro.10.).

§. 36.

XI. Lehrsatz:

Wenn man im gleichschenklichten Dreiecke von der Spitze aus die Grundlinie durch eine gerade Linie halbirt, so theilet sie auch den Winkel an der Spitze in zwei gleiche Theile, und steht auf die Grundlinie perpendikulär.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 37.) das Dreieck ABC gleichschenklicht, und die von der Spitze B gezogene gerade Linie BD halbire die Basis AC, daß somit AD = CD.

2) Nach der Voraussetzung ist AB = BC, dann AD = DC, und BD als gemeinschaftliche Seite = BD, somit △ ABD ≌ △ BDC (§. 24.), und p = q, wie auch m = n, weil die Winkel p und q den gleichen Seiten AD und DC, und die Winkel m und n den gleichen Seiten AB und BC opponirt sind (§. 18. Zus. IV.);

3) Die gleichen Winkel m und n sind Nebenwinkel (§. 8. a.), weßhalb BD auf AC senkrecht steht (§. 8. c. und d.).

Also theilet die gerade Linie BD, wenn sie von der Spitze B aus die Basis AB halbirt, den Winkel an der Spitze in zwei gleiche Theile, und steht auf die Grundlinie perpendikulär.

I. Zusatz: Wenn im gleichschenklichten Dreiecke eine gerade Linie den Winkel an der Spitze halbirt, so halbirt sie auch die Grundlinie, und steht darauf senkrecht.

Denn wenn (Fig. 37.) der Winkel B halbirt wird, so ist p = q, ferner ist AB = BC und BD = BD, also △ ABD ≌ △ BDC (§. 20.), und AD = DC, wie auch m = n, d. h., nach dieser Voraussetzung halbirt BD die Grundlinie AC, und steht darauf senkrecht.

II. Zusatz: Zieht man im gleichschenklichten Dreiecke von der Spitze auf die Grundlinie ein Perpendikel, so halbirt dieses sowohl den Winkel an der Spitze, als auch die Grundlinie.

Den (Fig. 37.) wenn BD auf AC von der Spitze B aus senkrecht steht, so ist $m = n = 90°$; ferner ist $AB = BC$, und $BD = BD$, also $\triangle ABD \cong \triangle BDC$ (§. 34. Zus. II.), weßhalb $p = q$, und $AD = DC$.

III. Zusatz: Wenn man im gleichschenklichten Dreiecke die Grundlinie durch ein Perpendikel in der nämlichen Ebene halbirt, so geht es durch die Spitze des Dreieckes. Denn wenn (Fig. 37.) das Perpendikel nicht durch die Spitze B ginge, so könnte man von B nach D die gerade Linie BD ziehen, sie wäre nach dem Lehrsatze, weil sie AC halbirt, auf AC senkrecht, und es gäbe in einer Ebene vom Punkte D aus auf der nämlichen Seite von AC auf diese Linie zwei Perpendikel, was nicht möglich ist (§. 32. Zus. II.); deßwegen muß das Perpendikel, welches in der nämlichen Ebene am Mittelpunkte der Basis gezogen wird, durch die Spitze des gleichschenklichten Dreieckes gehen.

IV. Zusatz: Wenn in einer Ebene zwei gleichschenklichte Dreiecke eine gemeinschaftliche Basis haben, und auf verschiedenen Seiten derselben liegen, so halbirt die gerade Linie, welche die Spitze dieser Dreiecke verbindet, sowohl die Winkel an den Spitzen, als auch die Grundlinie, und steht auf dieser letzteren senkrecht.

Es seien (Fig. 37.) in der nämlichen Ebene die Dreiecke ABC und AEC, welche die nämliche Basis AC haben, gleichschenklicht, und man errichte im oberen Dreicke ABC von B auf AC das Perpendikel BD, so wird dieses den Winkel B und die Basis AC halbiren (Zus. II.), und seine Verlängerung DE steht ebenfalls auf AC senkrecht (§. 10. Zus. IV.), geht durch die Spitze E des unteren Dreieckes AEC (Zus. III.), und halbirt deßhalb auch den Winkel E; von B nach E ist aber nur eine gerade Linie möglich (§. 3. Zus. II.), folglich ist BE auf AC perpendikulär, und halbirt die Winkel an den Spitzen, und die Basis AC.

Anmerkung: Aus dem hier aufgestellten Lehrsatze geht hervor, daß (Fig. 30.) die gerade Linie BD, welche vermöge der im §. 27. angegebenen Verfahrungsweise die Linie AC halbirt, auf diese Linie senkrecht steht, und die Winkel B und D in zwei gleiche Theile theilet; woraus ebenfalls die Wahrheit des IV. Zusatzes ersichtlich ist.

II. Abschnitt.

Von Parallellinien.

§. 37.

Erklärungen.

a) Wenn zwei gerade Linien in der nämlichen Ebene so liegen, daß sie verlängert auf einer Seite zusammen stoßen, so heissen sie nach dieser Seite hin konvergent oder zusammenfahrend, und nach der entgegengesetzten Seite hin divergent oder auseinanderfahrend; daher sind (Fig. 39.) die Linien LP und CD nach der Seite von P und D hin, wenn sie verlängert auf dieser Seite zusammen stoßen, konvergent, und auf der entgegengesetzten Seite von L und C divergent.

b) Liegen zwei gerade Linien in der nämlichen Ebene so, daß sie, wie immer verlängert, nie zusammen stoßen, und sich somit nie schneiden, so heissen sie gleichlaufende Linien oder Parallellinien, wie (Fig. 38.) die Linien AB und CD.

c) Um die parallele Lage zweier Linien auszudrücken, setze man zwischen sie das Zeichen (#); daher z. B. zeigt AB # CD an, daß AB mit CD parallel ist.

d) Werden in einer Ebene (Fig. 38.) zwei gerade Linien AB und CD von einer dritten geraden Linie EF geschnitten, so nennt man

α) die Winkel m und n, wie auch p und r die beiden inneren Winkel auf einer Seite; dann

β)

β) den Winkel q den äußeren, und n seinen inneren entgegengesetzten Winkel, und

γ) die Winkel n und p, wie auch r und m die beiden inneren Wechselwinkel.

Anmerkung: Wenn man nur sagt »die beiden inneren Winkel, und die beiden Wechselwinkel«, so versteht man allemal die inneren auf einer Seite liegenden Winkel, und die inneren Wechselwinkel.

§. 38.

I. Lehrsatz:

Wenn zwei gerade Linien in einer Ebene von einer dritten geraden Linie so geschnitten werden, daß die beiden inneren Winkel zusammen 180 Grad haben, oder daß der äußere Winkel seinem inneren entgegengesetzten gleich ist, oder endlich daß die beiden Wechselwinkel einander gleich sind, so sind die Linien parallel.

Beweis:

1) Es seien AB und CD die beiden Linien (Fig. 38.), die durch EF so geschnitten werden, daß $m + n = 180^\circ = 2R$;

2) Haben diese zwei Winkel 180°, so halten die beiden anderen inneren Winkel auch 180°; denn

$$\left.\begin{array}{ll} & p + m = 180^\circ, \\ \text{dann} & r + n = 180^\circ, \end{array}\right\} \text{(§. 11. Zus. III.)},$$

$$\begin{array}{ll} \text{also} & p + m + r + n = 360^\circ \text{ (Arithm. I. §. 25. I.)}, \\ \text{ferner} & m + n = 180^\circ \text{ (per hyp.)}, \\ \hline \text{somit} & p + r = 180^\circ = 2R \text{ (Arithm. I. §. 34. I.)}. \end{array}$$

3) Es können also die Linien AB und CD, wie immer verlängert, auf keiner Seite zusammen stoßen, weil sie sonst mit der durchschneidenden Linie EF ein Dreieck bilden würden, wo die beiden Winkel $m + n = 180^\circ$, oder $p + r = 180^\circ$, was nicht möglich ist (§. 28. Zus. II.), daher sind diese Linien parallel; das ist, wenn $m + n = 180^\circ$, so ist AB ‡ CD.

4) Werden die Linien so geschnitten, daß $q = n$, so ist $m + n = 180^\circ$;

denn $p + m = 180^\circ$ (§. 11. Zus. III.),
dann $q = n$ (per hyp.),

also $m + n = 180^\circ = 2R$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 10.).

Wenn aber $m + n = 180^\circ$, so sind die Linien parallel, also ist auch AB # CD, wenn $q = n$.

5) Endlich sind auch die Linien parallel, wenn sie so geschnitten werden, daß $p = n$, weil dann wieder $m + n = 180^\circ$;

denn $p + m = 180^\circ$ (§. 11. Zus. III.),
dann $p = n$ (per hyp.),

also $m + n = 180^\circ$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 10.).

Das heißt, wenn $p = n$, so ist wieder AB # CD.

I. Zusatz: Wenn in einer Ebene zwei gerade Linien auf einer dritten geraden Linie senkrecht stehen, so sind sie parallel, weil (Fig. 42.) dann $m = R$, und $n = R$ (§. 8. d.), und daher $m + n = 2R$, weßhalb EF # GH (Lehrs.).

II. Zusatz: Wenn in einer Ebene zwei gerade Linien auf einer anderen unter gleichen schiefen Winkeln aufstehen, so sind jene Linien auch parallel, weil sie dann allemal so durch eine gerade Linie geschnitten werden, daß der äußere und innere entgegengesetzte Winkel einander gleich sind (Lehrs.).

§. 39.

I. Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt in einer Ebene zu einer geraden Linie eine Parallele zu ziehen.

Auflösung:

1) Es soll (Fig. 38.) durch den Punkt G eine gerade Linie gezogen werden, die mit CD parallel ist;

2) Man ziehe von G zu einem beliebigen Punkte H die gerade Linie GH, und verlängere diese unbestimmt, etwa bis zu E;

3) An die Linie EG zeichne man dann den Win-

kel EGB, welcher den Punkt G zum Scheitel hat (§. 25.), und dem Winkel GHD gleich ist; oder

4) Man zeichne an die Linie GH auf der anderen Seite den Winkel AGH = GHD mit dem Scheitel G;

5) Verlängert man nun den Schenkel BG gegen A, oder AG gegen B, so erhält man die Linie AB, welche mit CD parallel ist (§. 38. Nro. 4 und 5.).

Anmerkung: Mechanisch können auf dem Papier Parallellinien mittels des so genannten Parallellineals gezogen werden, indem dieses aus zwei mit einander verbundenen Regeln oder Linealen besteht, die in jeder beliebigen Lage gleich weit von einander entfernt sind.

§. 40.

II. Lehrsatz:

Wenn zwei gerade Linien in einer Ebene durch eine dritte gerade Linie so geschnitten werden, daß die beiden inneren Winkel zusammen kleiner als zwei rechte, oder kleiner als 180 Grad sind, so stoßen jene Linien verlängert in einem Punkte auf jener Seite zusammen, wo diese Winkel sind.

I. Beweis:

1) Man setze (Fig. 39.), die Linien LP und CD haben in der nämlichen Ebene eine solche Lage, daß, wenn sie durch EF geschnitten werden, die Winkel

$$HGD + GHP < 2R;$$

2) Am Punkte H verzeichne man in der nämlichen Ebene den Winkel AHG so, daß er dem Winkel HGD gleich wird (§. 25.);

3) Die Nebenwinkel (§. 8. Zus. III.)

AHG + GHB sind = 2R,
dann nach Nro. 2. ist AHG = HGD,
also HGD + GHB = 2R,
ferner HGD + GHP < 2R,
mithin ist HGD + GHP < HGD + GHB,
und GHP < GHB;

4) Daher liegt die Linie HP zwischen HG und HB;

5) Nun stelle man sich vor, es werde die Linie AB, welche mit CD parallel ist (§. 38.), gegen CD in paralleler Lage gerückt, bis H auf G, und somit AB auf CD fällt, und mit AB werde auch LP so hinabgerückt, daß diese Linie mit EF immer dieselben Winkel bildet;

6) Wie der Punkt H auf G fällt, so kommt HP ganz unter CD, mithin muß schon eher der Punkt P die Linie CD geschnitten haben;

7) Rückt man nun den Punkt H an seine erste Lage näher, so fällt zwar der Durchschnitt von P immer weiter gegen D, es läßt sich aber für keine Lage von H ein letzter angeben, folglich durchschneidet auch LP in der ersten Lage, da sich wegen des kleineren Winkels GHP (Nro. 3.) die Linie HP gegen CD neigt, vergrößert die Linie CD.

II. Beweis:

1) Man setze wieder (Fig. 39.), die Linien LP und CD haben in der nämlichen Ebene eine solche Lage, daß, wenn sie durch EF geschnitten werden, die Winkel $HGD + GHP < 2R$ sind;

2) Man zeichne an die Linie HE und den Scheitel H auf der Seite von P und D den Winkel $EHB = HGD$ (§. 25.), so ist, wenn man den Schenkel BH gegen A hin verlängert, die Linie AB mit CD parallel (§. 38. Nro. 4.);

3) Die Winkel EHP und PHG sind Nebenwinkel (§. 8. a.), somit $EHP + PHG = 2R$ (§. 8. Zus. III.).

Weil $PHG + HGD < 2R$ (per hyp.), so ist $EHP + PHG > PHG + HGD$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 6.), weßhalb, wenn man auf beiden Seiten PHG wegläßt, $EHP > HGD$; ferner nach Nro. 2. ist $HGD = EHB$, also $EHB < EHP$, und die Linie HB liegt zwischen HE und HP;

4) Der Winkel EHP ist dem Winkel GHL gleich (§. 10. Zus. III.), und eben so ist EHB = GHA; nun ist nach Nro. 3. der Winkel EHP > EHB, also auch GHL > GHA, und der Schenkel HA liegt zwischen HL und HG;

5) Die Winkel AHG und GHB sind Nebenwinkel, also AHG + GHB = 2R; dann ist nach Nro. 2. der Winkel EHB = HGD, und EHB = AHG (§. 10. Zus. III.), also HGD = AHG, und HGD + GHB = 2R; ferner ist HGD + GHP < 2R (per hyp.), weßhalb HGD + GHB > HGD + GHP, und GHB > GHP, woraus folgt, daß HP zwischen HG und HB liegt;

6) HGD + GHP < 2R (per hyp.), nach Nro. 5. ist HGD = AHG, also AHG + GHP < 2R, oder AHP < 2R, das ist, der Winkel AHP ist hohl (§. 9. b.);

7) Weil HP zwischen HB und HG liegt (Nro. 6.), und HA zwischen HL und HG ist, so liegt HG zwischen HA und HP, also zwischen den Schenkeln des hohlen Winkels HP, und somit der Punkt G innerhalb dieses Winkels;

8) Der Punkt G liegt in der Linie CD, da EF in diesem Punkte die Linie schneidet; deßhalb schneidet die Linie CD beim hohlen Winkel AHP wenigstens einen Schenkel (§. 18. Zus. VI.); den Schenkel AH oder seine Verlängerung schneidet sie aber nicht, weil AH oder AB mit CD parallel ist (Nro. 2.), daher schneidet HP oder LP verlängert die Linie CD gegen die Seite P und D hin, weil auf dieser Seite der Schenkel HP liegt, und HP zwischen HG und HB ist.

Es schneiden sich also die Linien LP und CD verlängert in einem Punkte auf der Seite von P und D, wenn sie in einer Ebene liegen, und durch EF so geschnitten werden, daß HGD + GHP < 2R, oder daß HGD + GHP < 180 Grad.

I. Zusatz: Werden in einer Ebene zwei gerade Linien so geschnitten, daß die beiden inneren Winkel

auf einer Seite mehr haben als 180°, oder daß sie größer sind als zwei rechte Winkel, so divergiren sie auf der Seite dieser Winkel, und stoßen verlängert auf der anderen Seite in einem Punkte zusammen, sind also da konvergent.

Denn wenn (Fig. 39.) die Winkel LHG + CGH > 2R, so sind ihre Nebenwinkel zusammen, nämlich PHG + HGD < 2R, oder kleiner als 180 Grad, weil diese vier Winkel zusammen vier rechten gleich sind (§. 8. Zus. III.); sind aber PHG + HGD < 2R, so stoßen nach dem Lehrsatze die Linien auf dieser Seite zusammen, sind also da konvergent, und auf jener Seite divergent, wenn LHG + HGC > 2R.

II. Zusatz: Wenn in einer Ebene zwei gerade Linien so von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, daß der äußere Winkel größer ist, als der innere entgegengesetzte, so schneiden sich die Linien in einem Punkte auf der Seite dieser Winkel; weil dann die inneren auf einer Seite liegenden Winkel kleiner als 2R, oder kleiner als 180 Grad sind. Denn (Fig. 39.) es sei

	EHP > HGD (per hyp.),
dann	GHP = GHP
also	EHP + GHP > HGD + GHP,
ferner	EHP + PHG = 2R (§. 8. Zus. III.),
mithin	PHG + HGD < 2R.

Um deßwillen sind jetzt wieder die Linien LP und CD gegen die Seite P und D hin konvergent, und auf der entgegengesetzten Seite gegen L und C hin divergent (§. 37. a.).

III. Zusatz: Werden zwei gerade Linien in einer Ebene durch eine gerade Linie so geschnitten, daß der äußere Winkel kleiner ist, als der innere entgegengesetzte, so stoßen sie verlängert auf der anderen Seite zusammen, sind also da konvergent, und auf der ersten Seite divergent.

Denn (Fig. 39.) wenn CGF > LHG, so ist aus dem so eben angeführten Grunde CGH + GHL > 180°, weßhalb die Linien LP und CD nach dem ersten Zusatze dieses §. auf der entgegengesetzten Seite gegen P und D zusammen stoßen.

Anmerkung: Euklides führt diesen Lehrsatz ohne Beweis als ein Axiom auf, und er ist unter seinen Grundsätzen das bekannte eilfte Axiom.

In verschiedenen mathematischen Werken findet man verschiedene Versuche, diesen Satz als ein Theorem aufzustellen, und dafür einen giltigen Beweis aufzufinden; weil man ohne denselben den Lehrsatz des nächsten §. nicht beweisen könnte, daß nämlich bei Parallellinien die beiden inneren Winkel zwei rechten gleich sind, oder 180 Grad halten.

Herr Hofprediger und Professor Schulz führt den Beweis des Lehrsatzes dieses §. aus den unendlichen Winkelflächen, unter denen er die Flächen versteht, die zwischen den unbestimmt großen Schenkeln der geradlinigten Winkel liegen.

Herr Professor Dr. Kiesewetter hält in seinen Anfangsgründen der reinen Mathematik alle aufgefundenen Beweise für unzuläßig, und stellt für dieses Theorem, dessen Wahrheit nie bezweifelt wurde, anstatt eines strengen Beweises nur eine Erläuterung auf.

Herr Professor Klügel schrieb in Göttingen eine Disputation (conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio 1763), in der er mehrere Versuche, diesen Lehrsatz zu beweisen, einer Prüfung unterwirft.

Den vorstehenden I. Beweis führt auch der Herr geistliche Rath und Stadtpfarrer Professor Magold im II. Theile seines mathematischen Lehrbuches an.

Der II. Beweis, den ich diesem Lehrsatze von Nro. 1 — 8. beifügte, kommt im Grundrisse der Mathematik von Lorenz vor. Er stützt sich darauf, daß man bei einem hohlen Winkel die Schenkel über einen Punkt, der innerhalb liegt, allemal so verlängern kann, daß sie mit einer dritten geraden Linie ein Dreieck bilden, in dem dieser Punkt liegt, wo dann jede gerade Linie, die durch diesen Punkt geht, wenigstens einen Schenkel eines jeden Dreieckswinkels berühren oder schneiden muß (§. 18. Zus. VI.).

§. 41.

III. Lehrsatz:

Wenn zwei Parallellinien von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, so sind die beiden inneren Winkel auf einer Seite zusammen gleich zwei rechten Winkeln, oder gleich 180°, ferner ist der innere Winkel seinem äußeren entgegengesetzten gleich, und die inneren Wechselwinkel sind ebenfalls einander gleich.

Beweis:

1) Gesetzt, es werden (Fig. 38.) die Parallellinien AB und CD durch EF geschnitten;

2) Hätten die beiden inneren Winkel m und n nicht 180 Grad, so hätten sie mehr oder weniger als 180°; haben sie weniger als 180°, und ist somit $m + n < 2R$, so stoßen die Linien verlängert auf der Seite von B und D zusammen (§. 40.), was nicht möglich ist, weil sie nach der Voraussetzung parallel sind; haben aber die Winkel m und n mehr als 180°, so stoßen die Linien verlängert auf der entgegengesetzten Seite, somit wieder auf der Seite von B und D zusammen, was ebenfalls der Voraussetzung widerspricht (§. 40. Zus. I.);

3) Es ist also $m + n = 180°$, und aus den nämlichen Gründen $p + r = 180°$; d. h., die beiden inneren Winkel auf einer Seite halten, wenn AB # CD, mit einander zwei rechte Winkel, oder sind $= 180°$;

4) Nach Nro. 3. ist $m + n = 2R$, dann sind q und m Nebenwinkel, also $q + m = 2R$, somit $m + n = q + m$, und $n = q$, d. h., wenn AB # CD, so ist der innere Winkel n seinem äußeren entgegengesetzten Winkel q gleich;

5) Endlich ist nach Nro. 4. der Winkel $n = q$, dann $q = p$ (§. 10. Zus. III.), also $n = p$, d. h., wenn AB # CD, so sind die inneren Wechselwinkel n und p, und aus den nämlichen Gründen r und m einander gleich.

I. Zusatz: Durch einen Punkt gibt es in einer Ebene mit einer geraden Linie nur eine Parallele.

Denn es sei (Fig. 39.) die Linie AB, in welcher der Punkt H liegt, mit CD parallel, und es sei auch die Linie LP, welche ebenfalls durch diesen Punkt geht, mit CD parallel; zieht man nun die Linie EF, welche AB und CD schneidet, so bildet LP auf der Seite von B mit EF einen Winkel PHG, der kleiner oder größer ist als BHG; so daß HGD + PHG allemal kleiner oder größer ist als 2R, weßhalb LP nicht auch mit CD parallel sein kann (§. 40.).

II. Zusatz: Wenn eine gerade Linie in einer Ebene die eine Parallele in einem Punkte schneidet, so schneidet sie verlängert auch die andere Parallellinie.

Denn (Fig. 39.) wenn AB # CD, und die gerade Linie LP die Parallele AB im Punkte H schneidet, so wäre sie, wenn sie nicht auch CD schneiden würde, mit CD parallel (§. 37. b.), und es gäbe durch H mit CD die beiden Parallelen AB und LP, was nicht möglich ist (Zus. I.); deßhalb muß LP verlängert auch die andere Parallele CD in einem Punkte schneiden.

III. Zusatz: Wenn zwei gerade Linien mit einer dritten Linie in der nämlichen Ebene parallel sind, so sind sie es auch unter sich.

Denn wenn (Fig. 40.) die Linie AB # CD, und CD # EF, so wird die gerade Linie GH, welche AB schneidet, auch CD schneiden, und deßhalb auch die Parallele EF (Zus. II.); ferner ist der Winkel m = n, und n = p, weil AB # CD, und CD # EF (per hyp. und Lehrs.); also ist m = p, und deßwegen auch AB # EF (§. 38.).

IV. Zusatz: Parallelen zwischen Parallelen sind gleich lang; das ist (Fig. 41.), wenn BC # AD, und BA # CD, so ist BC = AD, und BA = CD.

Denn man ziehe die Diagonal AC (§. 12. f..), so ist der Winkel m = q, weil BC # AD, und n = p, weil AB # CD (Lehrs.), dann AC als gemeinschaftliche Seite ist = AC, also △ ABC ≌ △ BCD (§. 22.), und BC = AD, wie auch AB = CD (§. 18. Zus. IV.).

V. Zusatz: Zwischen zwei Parallelen sind alle

Perpendikel unter sich parallel und gleich; das ist (Fig. 42.), wenn AB ⧣ CD, so ist EF ⧣̳ GH.

Denn weil EF und GH Perpendikel sind, die von Punkten der oberen Parallele auf die untere gezogen wurden, so ist der Winkel $m = R$, und $n = R$ (§. 8. c und d.), also $m + n = 2R$, und EF ⧣ GH (§. 38.), daher auch $EF = GH$ (Zus. IV.).

Aus diesem Grunde stehen auch zwei Parallelen in allen ihren Punkten gleich weit von einander ab, da die Entfernungen der Punkte von geraden Linien durch Perpendikel bestimmt werden (§. 33. Zus. II.).

VI. Zusatz: Wenn die Schenkel eines Winkels inner den Schenkeln eines anderen Winkels in einer Ebene liegen, und mit diesen parallel sind, so sind die Winkel einander gleich; das ist (Fig. 43.), wenn die Winkel ABC und abc in der nämlichen Ebene liegen, und AB ⧣ ab, wie auch BC ⧣ bc, so ist $ABC = abc$.

Denn man ziehe durch die Scheitel dieser Winkel die gerade Linie FE, so ist $m = x$, weil AB ⧣ ab, und $n = y$, weil $BC = bc$ (Lehrs.), also $m + n = x + y$, und somit $ABC = abc$.

VII. Zusatz: Wenn von zwei Parallelen die eine auf einer geraden Linie in einer Ebene senkrecht steht, so steht die andere auf dieser Linie auch senkrecht. Denn (Fig. 42.) wenn AB auf EF senkrecht ist, so ist der Winkel $E = R$ (§. 8. c und d.); ferner die Linie EF, da sie nach der Annahme in der nämlichen Ebene liegt, schneidet auch die Parallele CD (Zus. II.), daher ist $E + m = 2R$ (Lehrs.), und also $m = R$, weßhalb auch CD auf EF senkrecht steht (§. 9. Zus. IV.).

VIII. Zusatz: Wenn eine gerade Linie in der nämlichen Ebene auf die eine Parallele senkrecht steht, so steht sie auch auf der anderen senkrecht. Denn (Fig. 42.) wenn EF auf AB senkrecht steht, so steht auch AB auf EF senkrecht, und deßhalb auch EF auf CD (Zus. VII.).

Anmerkung: In der Planimetrie wird gezeigt werden, daß (Zus. III.) zwei Linien unter sich parallel sind, wenn sie es mit einer dritten sind, und schon nicht alle drei Linien in der nämlichen Ebene liegen, gleichwie auch

da bewiesen wird, daß (Zus. VI.) zwei Winkel einander gleich sind, wenn sie auch nicht in der nämlichen Ebene, und die Schenkel des einen Winkels mit den Schenkeln des anderen parallel sind.

§. 42.

IV. Lehrsatz:

Wenn man auf den Schenkeln eines hohlen Winkels in der nämlichen Ebene zwei Perpendikel errichtet, so stoßen sie verlängert allemal in einem Punkte zusammen, und zwar

a) beim rechten und stumpfen Winkel innerhalb der Schenkel, und

b) beim spitzigen Winkel in einem Punkte, der entweder innerhalb der Schenkel, oder in einem Schenkel, oder außerhalb der Schenkel dieses Winkels liegt.

Beweis von a:

1) Es sei (Fig. 44.) der Winkel ABC ein rechter oder ein stumpfer Winkel, und auf seine Schenkel seien in der nämlichen Ebene die Perpendikel EF und GH errichtet;

2) Man verbinde die beiden Punkte E und H, in welchen die beiden Perpendikel die Schenkel berühren, durch die gerade Linie EH;

3) Weil B ein rechter oder stumpfer Winkel ist (per hyp.), so sind m und n spitzige Winkel (§. 29. Zus.), also $m < R$, und $n < R$; ferner ist $BEF = R$, und $BHG = R$ (§. 8. c und d.), somit liegt EH zwischen den Winkeln BEF und BHG, weßhalb $p < BEF$, und $q < BHG$, und daher auch $p + q < BEF + BHG$, also $p + q < 2R$;

4) Es stoßen also die Linien EF und GH innerhalb des rechten oder stumpfen Winkels ABC zusammen (§. 40.).

Beweis von b:

1) Ist (Fig. 44.) der Winkel B spitzig, und bildet EH mit AB und BC zwei spitzige Winkel, so liegt EH zwischen den rechten Winkeln BEF und BHG, deßhalb ist $p + q < 2R$, und die Perpendikel EF und HG stoßen innerhalb des spitzigen Winkels zusammen (§. 40.);

2) Bildet (Fig. 45.) die Linie EH mit BC den rechten Winkel m, und steht somit EH auf BC senkrecht (§. 9. Zus. IV.), so fällt die Linie EH mit dem Perpendikel in eine gerade Linie zusammen (§. 32. Zus. II.), und das Perpendikel HG schneidet deßhalb verlängert das Perpendikel EF im Punkte E, welcher im Schenkel BA liegt;

3) Ist endlich (Fig. 46.), wenn man wieder die Linie HE zieht, der Winkel BHE stumpf, also größer, als der rechte Winkel BHG, so stoßt HG verlängert mit BA in m zusammen, da $B + n < 2R$ (per hyp.), und im rechtwinklichten Dreiecke BHm ist $m < R$ (§. 29. Zus.), und deßwegen sein Nebenwinkel $q > R$ (§. 9. Zus. V.); ferner ist $BEF = R$ (per hyp.), somit sein Nebenwinkel BEN auch $= R$ (§. 9. Zus. III.), und q oder $BqM > BEN$, weßwegen die Perpendikel HG und FE verlängert auf der Seite dieser Winkel zusammen stoßen (§. 40. Zus. II.), also in einem Punkte, der außerhalb der Schenkel des Winkels ABC liegt.

Es stoßen demnach zwei gerade Linien, die auf den Schenkeln eines hohlen Winkels in der nämlichen Ebene perpendikulär sind, allemal in einem Punkte zusammen.

§. 43.

V. Lehrsatz:

Die drei Winkel eines Dreieckes halten zusammen zwei rechte Winkel, oder 180 Grad.

Beweis:

1) Man verlängere (Fig. 47.) im Dreiecke ABC die Seite AC gegen D hin, und ziehe durch den Punkt C die Linie CE parallel mit AB, dann sind bei diesen

Parallelen die Winkel n und B innere Wechselwinkel, und A ist der innere und p sein äußerer entgegengesetzter Winkel (§. 37. d.), also n = B, und p = A (§. 41.);

2) Die drei Winkel m + n + p = 2R (§. 8. Zus. V.) setzt man nun in dieser Gleichung anstatt n den gleichen Winkel B, und anstatt p den Winkel A, so ist m + B + A = 2R (Arithm. I. §. 10. Nro. 10.);

3) Die Winkel A, B und m oder C sind aber die Dreieckswinkel, also halten die drei Winkel eines Dreieckes zusammen 2R oder 180 Grad (§. 11. Zus. I.), das heißt, A + B + C = 2R = 180 Grad.

I. Zusatz: Wenn man die Summe zweier Winkel eines Dreieckes von 180 Grad subtrahirt, so erhält man allemal den dritten Dreieckswinkel, und wenn man einen Winkel von 180° subtrahirt, so hat man die Summe der übrigen; denn (Fig. 47.) nach dem Lehrsatze ist im Dreiecke ABC die Summe der drei Winkel gleich 180 Grad, also A + B + C = 180°, somit z. B. der Winkel C = 180° — A — B, und A + B = 180° — C (Arithm. III. §. 96. Zus. I.), wie auch C = 180° — (A + B), da man auch die Summe A + B auf einmal von 180° subtrahiren kann, anstatt daß man jeden einzelnen Summanden subtrahirt (Arithm III. §. 46. Lehrs. I.);

II. Zusatz: Wenn zwei Winkel eines Dreieckes den zwei Winkeln eines anderen Dreieckes gleich sind, so ist auch der dritte Winkel in dem einen Dreiecke dem dritten Winkel des anderen gleich.

Denn wenn (Fig. 21 u. 22.) der Winkel A = a, und B = b, so ist A + B = a + b (Arithm. I. §. 25. I.); ferner 180° = 180°, also 180° — (A + B) = 180° — (a + b), da man auf diese Weise Gleiches von Gleichem subtrahirt (Arithm. I. §. 34. I.); dann ist nach dem I. Zusatze C = 180° — (A + B), und c = 180° — (a + b), somit C = c, das ist, auch der dritte Winkel des einen Dreieckes ist dem dritten Winkel des anderen gleich.

III. Zusatz: Im gleichschenklichten Dreiecke ist durch einen Winkel jeder der beiden übrigen gegeben.

Ist (Fig. 20.) in einem solchen Dreiecke der Winkel an der Spitze (§. 18. d.) gegeben, somit B, so ist $A + C = 180^\circ - B$ (Zus. I.); ferner ist $A = C$ (§. 21. Zus. I.), also $A + C = 2A = 2C$, und deßhalb A oder $C = \frac{180^\circ - B}{2}$ (Arithm. III. §. 97. a.), das heißt, wenn man den Winkel an der Spitze von 180° abzieht, und den Rest mit 2 dividirt, so hat man jeden Winkel an der Grundlinie.

Ist hingegen ein Winkel an der Grundlinie gegeben, so ist auch der andere an der Basis, der ihm gleich ist, gegeben, somit findet man auch den Winkel an der Spitze, wenn man die Summe jener Winkel, oder das Duplum eines Winkels an der Grundlinie von 180° subtrahirt (Zus. I.).

IV. Zusatz: Im gleichseitigen Dreiecke ist jeder Winkel = 60 Grad; weil in einem solchen Dreiecke alle Winkel einander gleich sind (§. 21. Zus. II.), somit (Fig. 22.) der Winkel $A = B = C = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

V. Zusatz: Im rechtwinklichten Dreiecke betragen die zwei spitzigen Winkel zusammen 90°, weil der rechte Winkel 90° hat (§. 11. Zus. I.); ist also einer davon gegeben, so erhält man den anderen, wenn man den gegebenen spitzigen Winkel von 90° subtrahirt.

VI. Zusatz: Im Dreiecke ist der äußere Winkel den beiden inneren entgegengesetzten Winkeln zusammen genommen gleich; das ist (Fig. 47.), der Winkel $BCD = A + B$.

Denn $p = A$, und $n = B$, weil CE parallel mit AB ist, also $p + n = A + B$, oder $BCD = A + B$.

VII. Zusatz: Im gleichschenklichten Dreiecke ist der äußere Winkel an der Spitze doppelt so groß, als jeder Winkel an der Grundlinie.

Denn ist (Fig. 47.) das Dreieck ABC gleichschenklicht, und $AC = CB$, so ist der Winkel $A = B$ (§. 21. Zus. I.), also $A + B = 2A = 2B$; ferner ist $BCD = A + B$ (Zus. VI.), also $BCD = 2A = 2B$.

§. 44.

VI. Lehrsatz:

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Seite und zwei Winkel gleich haben, von welchen einer dieser Seite anliegt, und der andere ihr gegenüber steht.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 21 u. 22.) in den Dreiecken ABC und abc die Seite AC = ac, und der Winkel A = a, wie auch B = b;

2) Weil die Winkel A und B des einen Dreieckes den Winkeln a und b des anderen Dreieckes gleich sind (per hyp.), so ist auch der dritte Winkel C = c (§. 43. Zus. II.);

3) Man hat jetzt zwei Dreiecke, die eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich haben, folglich sind die Dreiecke kongruent (§. 22.); d. h., wenn AC = ac, A = a, und B = b, so ist △ ABC ≌ △ abc.

I. Zusatz: Durch eine Seite und zwei Winkel, von welchen einer der Seite anliegt, und der andere gegenüber steht, ist ein Dreieck vollkommen bestimmt; weil ein anderes Dreieck mit eben diesen Bestimmungen damit kongruent ist, und es somit in dieser Voraussetzung nur ein einziges Dreieck dieser Art gibt (§. 6.).

II. Zusatz: Durch eine Seite und zwei Winkel ist ein Dreieck vollkommen bestimmt.

Denn sind in einem Dreiecke nebst einer Seite zwei Winkel gegeben, so können diese der gegebenen Seite anliegen, oder einer kann der Seite anliegen, und dann steht ihr der andere gegenüber; nun ist aber ein Dreieck durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel (§. 22. Zus.), wie auch durch eine Seite, und einen anliegenden und den opponirten Winkel bestimmt (Zus. I.), also ist ein Dreieck durch eine Seite, und durch was immer für zwei Winkel vollkommen bestimmt.

§. 45.

II. Aufgabe, am Ende einer geraden Linie ein Perpendikel zu errichten.

Auflösung:

1) Man nehme (Fig. 48.) in der gegebenen geraden Linie AB einen beliebigen Punkt D an, und beschreibe, wenn das Perpendikel am Endspunkte A errichtet werden soll, über AD ein gleichschenklichtes Dreieck (§. 19. Zus. III.);

2) Man verlängere den Schenkel DC bis E, so daß EC = CD = AC ist, man erhält dadurch ein neues gleichschenklichtes Dreieck ACE;

3) Man ziehe von E nach A die gerade Linie EA, so ist sie am Endspunkte A auf AB das verlangte Perpendikel.

Beweis:

1) Weil die Dreiecke ACD und ACE gleichschenklicht sind (ex constr.), so ist der Winkel m = n, und p = q (§. 21. Zus. I.);

2) Im Dreiecke EAD sind alle Winkel gleich zwei rechten (§. 43.), also q + (p + m) + n = 180 Grad, wenn man nämlich anstatt des Winkels EAD die zwei Winkel p und m setzt, in die er durch AC getheilt wird (Arithm. I. §. 10. Nro. 2.), da C als Mittelpunkt zwischen E und D, also AC zwischen AE und AD liegt (§. 7. Anm. 4.);

4) Setzt man in der Gleichung q + p + m + n = 180° den Winkel p anstatt q, und m anstatt n, so ist p + p + m + m = 180°, also 2p + 2m = 180°, und wenn man mit 2 dividirt (Arithm. I. §. 62. I.), so ist p + m = 90°, mithin EAD = 90°, und die Linie EA ist am Endspunkte A auf AB senkrecht (§. 9. Zus. IV.).

Anmerkung: Wie auf die Linie AB am Punkte A ein Perpendikel gezogen wird, wenn man BA gegen A verlängert, ist im §. 32. gezeigt worden.

III.

III. Abschnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien in Vierecken.

§. 46.

I. Lehrsatz:

Im Vierecke halten alle vier Winkel zusammen vier rechte Winkel, oder 360 Grad.

Beweis:

a) Das Viereck (§. 13. a.) kann lauter hohle Winkel haben, oder

b) es kann in demselben auch ein erhabener Winkel vorkommen, und in beiden Fällen halten alle vier Winkel zusammen vier rechte, oder 360 Grad.

Beweis von a: 1) Wenn alle vier Winkel hohl sind, so ziehe man (Fig. 41.) von einem beliebigen Ecke, etwa von A, zum opponirten Ecke C die Diagonallinie AC, so wird das Viereck offenbar in die Dreiecke ABC und ADC getheilt;

2) Die drei Winkel eines Dreieckes halten mit einander zwei rechte Winkel, oder 180 Grad (§. 43.), mithin ist

$$p + B + m = 2R = 180°,$$

und $q + D + n = 2R = 180°,$

also $p + q + B + D + m + n = 4R = 360°,$

nun ist $p + q = BAD = A$, und $m + n = BCD = C$,

folglich ist $A + B + C + D = 4R = 360$ Grad.

Beweis von b: 1) Man ziehe (Fig. 49.) vom erhabenen Winkel B zum gegenüber stehenden Ecke D die Diagonallinie BD, man erhält in diesem Falle die beiden Dreiecke ABD und BCD;

2) Die drei Winkel eines Dreieckes halten mit einander zwei rechte Winkel oder 180°, also alle Winkel dieser beiden Dreiecke zusammen vier rechte oder 360°; nun geben aber alle diese Winkel zusammen genau die vier Winkel des Viereckes, also ist wieder die Summe aller Winkel, oder $A + B + C + D = 4R = 360°$.

Es halten demnach die vier Winkel eines jeden Viereckes zusammen vier rechte Winkel, oder 360 Grad.

Anmerkung: 1) Gegenwärtig beschränken sich die Untersuchungen immer auf Vierecke, und überhaupt auf Figuren von lauter hohlen Winkeln, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird.

2) Der Kürze wegen bezeichnet man das Viereck gewöhnlich nur durch zwei Buchstaben von zwei einander gegenüber stehenden Ecken, und setzt ihnen das Wort Viereck, oder auch das Zeichen (□) vor; daher (Fig. 41.) versteht man z. B. unter dem Ausdrucke »Viereck AC, oder □ AC« das Viereck ABCD.

§. 47.

II. Lehrsatz:

Ein Viereck ist vollkommen bestimmt,

a) durch zwei Seiten und die drei anliegenden Winkel; oder

b) durch drei Seiten und die beiden eingeschlossenen Winkel; oder

c) durch alle vier Seiten und einen Winkel; oder

d) durch alle Seiten nebst einer Diagonallinie.

Beweis von a:

1) Sind (Fig. 41.) im Vierecke AC die beiden Seiten AD und DC, und die drei anliegenden Winkel A, D und C gegeben, so sind, wenn die Diagonallinie AC gezogen wird, im Dreiecke ADC durch die gegebenen Seiten AD und CD und den eingeschlossenen Winkel D die übrigen zwei Winkel q und n sammt der dritten Seite AC gegeben (§. 20. Zus.);

2) Durch die beiden Winkel A und q ist der Winkel p, und durch die Winkel C und n ist der Winkel m bestimmt, indem $p = A - q$, und $m = C - n$;

3) Im zweiten Dreiecke ABC ist jetzt die Seite AC mit den beiden anliegenden Winkeln p und m gegeben; weßhalb das Dreieck selbst vollkommen bestimmt ist, und auch die Seiten AB und BC mit dem Winkel B gegeben sind (§. 22. Zus.).

Es sind also im Vierecke AC durch die zwei Seiten AD und CD, und durch die drei anliegenden Winkel A, D und C auch die zwei übrigen Seiten AB und BC nebst dem Winkel B bestimmt, und das Viereck selbst ist durch die anfangs gegebenen Stücke vollkommen bestimmt; das heißt, unter dieser Bedingung gibt es nur ein einziges Viereck dieser Art, und jedes andere Viereck, das mit diesem Vierecke die gegebenen Stücke gleich hat, ist mit demselben kongruent (§. 6.), hat also damit die nämliche Quantität und Qualität (Arithm. I. §. 2. h.).

Beweis von b:

1) Sind (Fig. 41.) im Vierecke AC die drei Seiten AB, AD und DC, und die beiden eingeschlossenen Winkel A und D gegeben, und wird die Diagonallinie AC gezogen, so ist das Dreieck ADC durch die Stücke AD, CD und D vollkommen bestimmt, und deßhalb auch in diesem Dreiecke die Seite AC mit den beiden Winkeln q und n gegeben (§. 20. Zus.);

2) Durch die beiden Winkel A und q ist der Winkel p bestimmt, und durch die Seiten AC und AB nebst dem Winkel p ist das Dreieck ABC bestimmt, daher ist es auch die Seite BC mit den beiden Winkeln B und m;

3) Die beiden Winkel m und n bestimmen den Winkel C, indem m + n = C.

Es ist also das Viereck durch drei Seiten und die beiden eingeschlossenen Winkel vollkommen bestimmt.

Beweis von c:

1) Sind im Vierecke AC alle vier Seiten und ein Winkel, etwa B, gegeben, und man zieht, damit B nicht getheilt wird, die Diagonallinie AC, so sind im Dreiecke ABC durch die drei gegebenen Stücke AB, BC und B die beiden übrigen Winkel p und m nebst der Seite AC bestimmt;

2) Im Dreiecke ACD sind jetzt alle drei Seiten gegeben, weßhalb das Dreieck selbst vollkommen bestimmt ist (§. 24.), und also auch die Winkel p, D und n bestimmt sind;

3) Die beiden Winkel p und q geben zur Summe den Winkel A, und m und n geben C; daher sind wieder alle Seiten und alle Winkel gegeben, und das Viereck ist durch alle vier Seiten und einen Winkel vollkommen bestimmt.

Beweis von d:

Sind endlich im Vierecke AC alle vier Seiten mit einer Diagonallinie bekannt, so sind in beiden Dreiecken alle drei Seiten bestimmt; dadurch sind es die Dreiecke selbst und ihre Winkel, und das Viereck ist unter der gesetzten Bedingung wieder vollkommen bestimmt.

Zusatz: Wenn daher in zwei Vierecken der Ordnung nach zwei Seiten mit den drei anliegenden Winkeln, oder drei Seiten mit den beiden eingeschlossenen Winkeln, oder alle vier Seiten mit einem Winkel, oder endlich alle Seiten mit einer Diagonallinie gleich sind, so sind allemal die übrigen drei gleichnamigen Stücke ebenfalls der Ordnung nach einander gleich, und die Vierecke sind kongruent.

Anmerkung: Hat das Viereck einen erhabenen Winkel, so kann man die Diagonallinie wieder so ziehen, daß im ersten Dreiecke bekannte Stücke vorkommen, welche das Dreieck bestimmen, wodurch dann auch das zweite Dreieck bestimmt wird, und es sind auch in einem solchen Vierecke durch die fünf gegebenen Stücke die drei übrigen bestimmt, im Falle die drei unbekannten Stücke nicht lauter Seiten sind.

§. 48.

Parallelogramm, Trapez und Trapezoid.

a) Ein Viereck, in welchem jedes Paar opponirter Seiten parallel ist, heißt ein Parallelogramm (Parallelogrammum); wie (Fig. 41.) das Viereck AC, wenn AD ⧺ BC und AB ⧺ CD.

b) Ein Viereck, in welchem nur ein Paar opponirter Seiten parallel ist, heißt ein Trapez (Trapezium); daher ist (Fig. 50.) das Viereck AC ein Trapez, wenn nur BC mit AD parallel ist.

c) Ein Viereck endlich (Fig. 51.), in welchem keine

Seite mit der anderen parallel ist, heißt ein **Trapezoid** (Trapezoides).

d) Beim Parallelogramme und beim Trapez heißt das Perpendikel zwischen den parallelen Seiten die **Höhe** dieser Figuren. Daher ist (Fig. 50.) das Perpendikel BE die Höhe des Trapezes AC.

I. **Zusatz:** Beim Parallelogramme und Trapez ist die Höhe immer gleich groß, man mag das Perpendikel von was immer für einem Punkte der einen Parallellinie auf die andere ziehen (§. 41. Zus. V.).

II. **Zusatz:** Im Parallelogramme halten zwei Winkel, die an einer Seite anliegen, zusammen 180 Grad, oder sind zwei rechten Winkeln gleich. Denn (Fig. 54.) im Parallelogramme AC ist $BC \# AD$, also $B + A = 180^\circ$, und $C + D = 180^\circ$; ferner $BA \# CD$, also $A + D = 180^\circ$, und $B + C = 180^\circ = 2R$ (§. 41.).

III. **Zusatz:** Im Parallelogramme sind die opponirten Winkel einander gleich; das ist (Fig. 54.), der Winkel A ist $= C$, und $B = D$. Denn $A + B = 180^\circ$, und $B + C = 180^\circ$ (Zus. II.), also ist $A = C$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 4. und §. 34. I.).

IV. **Zusatz:** Wenn im Parallelogramme ein bestimmter Winkel ein rechter Winkel ist, so sind die übrigen drei auch rechte Winkel; ist hingegen ein bestimmter Winkel desselben schief, so sind die übrigen drei Winkel auch schief, und jedes Parallelogramm hat deßhalb entweder lauter rechte, oder lauter schiefe Winkel.

Denn (Fig. 53.) wenn $A = R = 90^\circ$, so ist, weil nach dem II. Zusatze $A + B = 2R$, auch $B = R = 90^\circ$, und aus dem nämlichen Grunde $C = R$, und $D = R$, und deßhalb sind alle Winkel rechte Winkel. Ferner (Fig. 54.) wenn $A < R$, so ist $B > R$, daher $C < R$, und $D > R$, das ist, wenn ein Winkel schief ist, so sind es auch die übrigen drei (Zus. II.).

V. **Zusatz:** Im Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten einander gleich. Denn (Fig. 41.) wenn das Viereck AC ein Parallelogramm ist, so ist $AD \# BC$ und $AB \# CD$, und deßhalb, weil Parallellinien zwischen Parallellinien einander gleich sind (§. 41. Zus. IV.), $AD = BC$ und $AB = CD$.

VI. Zusatz: Jede Diagonallinie theilet das Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke. Denn (Fig. 41.) nach dem V. Zusatze ist

$BC = AD$ } (Zus. V.),
und $AB = CD$ }
ferner $AC = AC$,

also ist $\triangle ABC \cong \triangle ACD$ (§. 24.).

VII. Zusatz: Wenn in einem Vierecke die gegenüberstehenden Seiten gleich sind, so sind sie auch parallel, und das Viereck ist eine Parallelogramm; das ist (Fig. 41.)

wenn $AB = CD$, und $BC = AD$,
so ist $AB \# CD$, und $BC \# AD$.

Denn man ziehe die Diagonallinie AC, so ist nach §. 24. das Dreieck $ABC \cong \triangle ADC$, also $m = q$ und $p = n$ (§. 18. Zus. IV.), mithin $BC \# AD$ und $BA \# CD$ (§. 38.), und deßhalb ist das Viereck AC in dieser Voraussetzung ein Parallelogramm (§. 48. a.).

VIII. Zusatz: Wenn in einem Vierecke zwei opponirte Seiten gleich und parallel sind, so sind auch die anderen zwei entgegenstehenden Seiten gleich und parallel, und das Viereck ist ein Parallelogramm; das ist (Fig. 41.), wenn $AD \,\underline{\underline{\#}}\, BC$, so ist auch $AB \,\underline{\underline{\#}}\, CD$.

Denn da $AD \# BC$,
so ist $m = q$ (§. 41.),
ferner $BC = AD$ (per hyp.),
und $AC = AC$,

also $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (§. 20.);

mithin $AB = CD$ (§. 18. Zus. IV.), und $p = n$, folglich auch $AB \# CD$ (§. 38.), und das Viereck ist unter dieser Bedingung ein Parallelogramm.

Wenn man daher die Endspunkte zweier gleich langer Parallelen durch gerade Linien verbindet, so erhält man ein Parallelogramm.

IX. Zusatz: Im Trapez ist eine von den Parallelen kleiner, als die andere. Denn wären sie gleich lang, so wäre das Viereck ein Parallelogramm (Zus. VIII.), und deßhalb kein Trapez (§. 48. b.).

X. Zusatz: Im Trapez sind die beiden Winkel die an der größeren Parallele anliegen, zusammen kleiner, als zwei rechte, und die an der kleineren Parallellinie anliegen, sind größer, als zwei rechte Winkel.

Denn (Fig. 55.) wenn man die kleinere Parallele BC mit der größeren AD gleich lang macht, und von F nach D die gerade Linie DF zieht, so ist, weil BF $\#$ AD, das Viereck AF ein Parallelogramm (Zus. VIII.), und deßhalb BAD + ADF oder $A + m + n = 2R$ (Zus. II.); wird nun der Winkel n weggenommen, so ist $A + m < 2R$, und daher sind, weil alle vier Winkel eines Viereckes vier rechten gleich sind (§. 46.), die an der kleineren Parallele anliegenden Winkel $B + C > 2R$.

XI. Zusatz: Wenn man im Trapez die Seiten, welche nicht parallel sind, gegen die kleinere Parallele hin verlängert, so stoßen sie auf dieser Seite in einem Punkte zusammen. Denn weil (Fig. 55.) nach dem vorigen Zusatze $A + D$ oder $A + m < 2R$, so stoßen die Linien AB und DC, gegen BC hin verlängert, im Punkte E zusammen (§. 40.).

XII. Zusatz: Zieht man in einem Parallelogramme die beiden möglichen Diagonalen, so halbiren sie sich in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte. Denn (Fig. 52.) zieht man im kleineren Parallelogramme ac die Diagonallinien ac und bd, so ist, weil im Parallelogramme die gegenüberstehenden Seiten parallel und gleich sind (§. 48. a. und Zus. V.), $bc = ad$, dann $o = n$, und $m = p$, also $\triangle\, afd \cong \triangle\, bfc$, und deßhalb $bf = fd$ und $af = fc$, das ist, die beiden Diagonalen theilen sich im gemeinschaftlichen Punkte f in zwei gleiche Theile.

Anmerkung: 1) Wenn sich zwei gerade Linien halbiren, und man verbindet ihre Endspunkte durch gerade Linien, so erhält man ein Parallelogramm, das ist (Fig. 52.), wenn $af = fc$ und $bf = fd$, so ist das Viereck ac ein Parallelogramm; indem die Dreiecke afd und afc wegen zweier gleicher Seiten und der gleichen Scheitelwinkel bei f kongruent sind, und also $o = n$ und bc $\#$ ad, mithin auch ab $\#$ cd ist (Zus. VIII.).

2) Jede gerade Linie (Fig. 52.), welche durch den Durchschnittspunkt f der Diagonalen von was immer für einem Punkte des Umfanges zu einem anderen gezogen wird, theilet wegen der Kongruenz der Dreiecke sowohl die Fläche, als auch sich selbst in zwei gleiche Theile; um deßwillen nennt man den Punkt f den Mittelpunkt der Größe des Parallelogramm's.

§. 49.

Aufgabe, aus zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel ein Parallelogramm zu verzeichnen.

Auflösung:

1) Sind (Fig. 54.) für das Parallelogramm die Seiten AD und AB mit dem eingeschlossenen Winkel A gegeben, so verzeichne man an eine beliebige gerade Linie nach §. 25. den Winkel A, und trage auf den Schenkeln desselben die gegebenen Seiten AD und AB auf;

2) Aus B beschreibe man mit AD, und aus D mit AB Kreisbögen, und ziehe zum Durchschnittspunkte C die geraden Linien BC und DC, so ist das dadurch verzeichnete Viereck AC das verlangte Parallelogramm.

Beweis:

1) Die mit den Linien AD und mit AB als Halbmessern beschriebenen Bögen stoßen bestimmt in einem Punkte bei C zusammen, weil diese Linien den Winkel BAD bilden, und deßhalb, wenn man von B nach D eine gerade Linie zieht, zwei von diesen drei Linien zusammen allemal größer sind, als die dritte einzeln (§. 17.);

2) Auf diese Weise erhält man ein Viereck, in welchem die gegebenen Seiten AD und AB und der eingeschlossene Winkel A vorkommen, und die gegenüber stehenden Seiten einander gleich sind, nämlich BC = AD, und DC = AB; weßhalb man das verlangte Parallelogramm verzeichnet hat (§. 48. Zus. VII.).

I. Zusatz: Durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ist ein Parallelogramm vollkommen bestimmt. Denn wenn (Fig. 54.) im Parallelogramme *A*C die beiden Seiten A*B* und *A*D, und der Winkel *A* gegeben sind, so sind dadurch die gegenüber stehenden Seiten *B*C und CD gegeben (§. 48. Zus. V.), und man hat ein Viereck, in welchem alle Seiten und ein Winkel gegeben sind, und das somit vollkommen bestimmt ist (§. 47. c.).

II. Zusatz: Aus diesem Grunde läßt sich aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel nur ein Parallelogramm verzeichnen, und jedes andere Parallelogramm, welches diese Stücke hat, ist damit kongruent.

Anmerkung: Aus den gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel läßt sich (Fig. 54.) das Parallelogramm auch dadurch verzeichnen, daß man durch B die Linie BC mit AD, und durch D die Linie DC mit AB parallel zieht (§. 39.); auf diese Weise schneiden sich die Linien BC und DC (§. 41. Zus. I.), und man erhält aus den gegebenen Stücken ebenfalls das verlangte Parallelogramm (§. 48. a.).

§. 50.

Quadrat, Rechteck, Rhombus und Rhomboid.

a) Ein Parallelogramm, in welchem alle Winkel rechte Winkel, und auch alle Seiten unter sich gleich sind, heißt ein Quadrat (Quadratum), wie (Fig. 52.) das kleinere Viereck ac und das größere *A*C.

b) Sind im Parallelogramme alle Winkel rechte Winkel, und die Seiten ungleich, so nennt man es ein Rechteck (Rectangulum), wie (Fig. 53.) das Viereck *A*C.

c) Sind die Winkel des Parallelogramm's schief (§. 8. b.), und alle Seiten gleich, so heißt es eine Raute oder Rhombus (Rhombus), wie (Fig. 41.) das Viereck *A*C.

d) Sind endlich im Parallelogramme die Winkel schief und die Seiten ungleich, so wird es ein Rhom-

boid (Rhomboides) genannt, wie (Fig. 54.) das Viereck *AC*.

I. Zusatz: Im Quadrate, und im Rechtecke sind alle Winkel einander gleich, weil jeder ein rechter Winkel ist, und somit 90 Grad hält.

II. Zusatz: Das Quadrat ist ein reguläres Viereck, da in demselben alle Seiten, und alle Winkel einander gleich sind (§. 13. b.).

III. Zusatz: Das Quadrat ist durch eine Seite, das Rechteck durch zwei Seiten, die einen Winkel einschließen, der Rhombus durch einen Winkel und eine Seite, und das Rhomboid durch zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel vollkommen bestimmt (§. 47.).

IV. Zusatz: Weil ein Quadrat, z. B. das Quadrat *AC* (Fig. 52.) durch die Seite *AD*, und eben so das Quadrat ac durch die Seite ad vollkommen bestimmt ist, so kann man das ganze Quadrat *AC* durch AD^q, und eben so das Quadrat ac durch ad^q bezeichnen, so daß also die Ausdrücke AD^q und ad^q überhaupt Quadrate bezeichnen, die aus den Seiten *AD* und ad konstruirt sind.

V. Zusatz: Wenn man zwei Linien gleich lang macht, und über jede ein Quadrat verzeichnet, so sind diese letzteren ebenfalls einander gleich, das ist (Fig. 52.), wenn $ad = AD$, so ist $ad^q = AD^q$; da durch eine Seite das Quadrat vollkommen bestimmt ist (Zus. III.), und somit alle Quadrate von gleichen Seiten kongruent sind.

Anmerkung: 1) Das Parallelogramm kann abgetheilt werden in das rechtwinklichte und schiefwinklichte Parallelogramm; das rechtwinklichte Parallelogramm mit lauter gleichen Seiten ist das Quadrat, und das mit ungleichen Seiten das Rechteck oder Oblong; das schiefwinklichte Parallelogramm von lauter gleichen Seiten heißt Rhombus, und das von ungleichen Seiten Rhomboid.

2) Da bei jedem Parallelogramme die opponirten Seiten einander gleich sind (§. 48. Zus. V.), so wird beim Quadrate und beim Rhombus erfordert, daß alle vier Seiten unter sich gleich sind.

§. 51.

III. Lehrsatz:

Wenn von zwei Quadraten die Seite des ersteren größer ist, als die Seite des anderen, dann ist auch das erste Quadrat größer, als das andere.

Beweis:

1) Man lege (Fig. 52.) das Quadrat ac, welches nach der Voraussetzung die kleinere Seite ad hat, so auf das andere Quadrat AC, daß sich die gleichen Winkel a und A decken; es fällt dadurch ab auf AB und ad auf AD;

2) Da nun $ab < AB$, und eben so $ad < AD$, so fallen die Linien bc und dc innerhalb des Quadrates AC, das erste Quadrat ac bedeckt also nur den Theil Ac vom Quadrate AC, weßhalb (Arithm. I. §. 10. Nro. 3.) auch $AD^q > ad^q$, das ist, die größere Seite gibt auch das größere Quadrat, und umgekehrt die kleinere Seite gibt das kleinere Quadrat.

I. Zusatz: Gleiche Quadrate haben gleiche Seiten, und sind kongruent, das ist, wenn $ad^q = AD^q$, so ist auch $ad = AD$.

Denn wäre $ad > AD$, so wäre nach dem Lehrsatze $ad^q > AD^q$; und wäre $ad < AD$, so wäre $ad^q < AD^q$. Beides ist aber gegen die Voraussetzung, daher haben gleiche Quadrate gleiche Seiten, und sind deßhalb kongruent (§. 50. Zus. V.).

II. Zusatz: Das größere Quadrat hat auch eine größere Seite, das ist, wenn $AD^q > ad^q$, so ist $AD > ad$.

Denn wäre $AD = ad$, so wäre $AD^q = ad^q$ (§. 50. Zus. V.), und wäre $AD < ad$, so wäre nach dem Lehrsatze $AD^q < ad^q$. Beides ist gegen die Voraussetzung, daher hat das größere Quadrat auch eine größere Seite, und umgekehrt das kleinere Quadrat hat eine kleinere Seite.

Anmerkung: 1) Soll man über eine gegebene Linie, z. B. (Fig. 52.) über AD, ein Quadrat verzeichnen, so errichtet man auf der nämlichen Seite an den beiden Endspunkten der Linie *AD* zwei Perpendikel (§. 45.), macht diese so lang wie *AD*, also AB = AD, und DC = AD, und verbindet ihre Endspunkte *B* und C durch die gerade Linie *BC*, und man hat das verlangte Quadrat *AC*, welches die gegebene Linie *AD* zur Seite hat (§. 48. Zus. VIII. und §. 50. a.).

Soll man überhaupt ohne eine gegebene Seite ein Quadrat verzeichnen, so zieht man (Fig. 52.) zwei beliebige gerade Linien ac und bd so, daß sie sich unter rechten Winkeln schneiden, also auf einander senkrecht stehen, man nimmt dann auf derselben vom Durchschnittspunkte f aus die vier gleichen Theile fa, fc, fd und fb, und verbindet die Punkte a, b, c und d durch die geraden Linien ab, bc, cd und da, und man erhält ein Quadrat ac. Denn weil bei f vier rechte Winkel sind, und af = fc = fd = fb, so sind die vier Dreiecke afd, afb, bfc und efd unter sich kongruent, und deßhalb ab = bc = cd = da; das Viereck ac ist also ein Parallelogramm (§. 48. Zus. VII.), und zwar ein Quadrat, weil der Winkel afd = dfc = 90°, dann p = n = 45°, und q = r = 45°, mithin p + q oder adc = 90 Grad (§. 48. Zus. IV.).

2) Soll man (Fig. 53.) über zwei ungleiche Seiten *AB* und *AD* ein Rechteck (§. 50. b.) verzeichnen, so verzeichnet man einen rechten Winkel *A*, trägt auf den Schenkeln desselben die gegebenen Seiten *AD* und *AB* auf, und verfährt dann nach Vorschrift des §. 49.

3) Auf eine ähnliche Weise verfährt man, wenn man aus einem gegebenen Winkel, und einer gegebenen Seite nach der im §. 49. angegebenen Vorschrift einen Rhombus (§. 50. c.), oder aus zwei gegebenen Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel eine Rhomboid (§. 50. d.) verzeichnen soll.

IV. Abschnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien in Vielecken.

§. 52.

Vielecke, dann gleichnamige und symmetrische, wie auch Vielecks= oder Polygons=Winkel.

a) Ein Vieleck (§. 13. a.) heißt ein Fünfeck (Pentagonum), Sechseck (Hexagonum) ꝛc., und überhaupt ein n Eck, je nachdem das Vieleck fünf, sechs ꝛc. oder überhaupt n Seiten zur Gränze hat.

b) Vielecke nennt man gleichnamig, wenn sie gleich viele Seiten oder Ecke haben.

c) Ein Vieleck heißt man symmetrisch, wenn es durch eine gerade Zahl von Seiten umgeben ist, derer jede zwei gegenüber stehende einander gleich und parallel sind.

d) Jeden Winkel an dem Umfange des Vielecks, den zwei Seiten desselben bilden, heißt man Vielecks- oder Polygons-Winkel (Angulus poligoni).

e) Werden bei einem Vielecke die Schenkel der Winkel gegen den Scheitel hin verlängert, und fallen die Verlängerungen außerhalb der Figur, so nennt man diese Winkel auswärts gehende Winkel; dagegen nennt man aber die Winkel einwärts gehend, wenn diese Verlängerungen in die Figur hineinfallen.

Sind alle Winkel eines Vielecks auswärtsgehend, so sagt man, man habe eine Figur mit lauter hohlen Winkeln (§. 9. b.), wie (Fig. 56.) das Siebeneck ABCDEFG; sind aber einige Winkel einwärts gehend, so hat man eine Figur, die nebst hohlen auch erhabene Winkel hat (§. 13. a.), wie (Fig. 57.) das angeführte Zwölfeck, wo die Winkel A, E, G und L einwärtsstehend oder erhaben sind.

1. Zusatz: In einem Vielecke von n Seiten, dessen Winkel sämmtlich hohl sind, kann man aus ei-

nem Ecke n — 3 Diagonallinien ziehen. Denn bei einem Vielecke von n Seiten oder Ecken kann man von einem Ecke zu den übrigen Ecken n — 1 gerade Linien ziehen; da nun alle diese Linien, außer der ersten und letzten, Diagonalen sind, so gibt es n — 1 — 2 = n — 3 Diagonalen. Man kann z. B. (Fig. 56.) im Siebenecke ABCDEFG vom Ecke *A* zu den übrigen sechs Ecken sechs gerade Linien, nämlich AB, *A*C, *A*D, *A*E, *A*F und *A*G ziehen, von welchen die erste *AB*, und die letzte *A*G als Vielecksseiten keine Diagonallinien sind (§. 12. f.); daher ist im Siebenecke die Anzahl der Diagonallinien = 7 — 1 — 2 = 7 — 3 = 4, das heißt, es gibt bei einem Siebenecke 7 — 3, also 4 Diagonalen.

II. Zusatz: Das Vieleck von n Seiten, dessen Winkel sämmtlich hohl sind, läßt sich durch die Diagonalen aus einer Ecke in n — 2 Dreiecke theilen. Denn das erste Paar Seiten gibt mit der ersten Diagonal ein Dreieck, jede folgende Seite gibt mit zwei Diagonalen wieder ein Dreieck, und nur beim letzten Dreiecke werden wieder zwei Seiten erfordert, mithin gibt es n — 2 Dreiecke bei einem Vielecke von n Seiten; um deßwillen ist (Fig. 56.) das Siebeneck durch die vom Ecke *A* aus gezogenen Diagonalen in 7 — 2, also in 5 Dreiecke getheilt.

III. Zusatz: Wenn in einem Vielecke nebst hohlen auch erhabene Winkel vorkommen, so kann man es durch Diagonalen, die man von den erhabenen Winkeln aus zieht, in mehrere Theile zerlegen, welche lauter hohle Winkel enthalten; daher (Fig. 57.) ist das Vieleck, welches die erhabenen Winkel *A*, E, G und L hat, durch die Diagonalen *A*E und GL in die drei Figuren ABCDE, dann AEFGLM und LGHJK getheilt, welche nur hohle Winkel haben.

IV. Zusatz: Wird nun, um die erhabenen Winkel in hohle zu theilen, eine Diagonallinie gezogen, so wird dadurch das Vieleck in zwei Theile getheilt; sind dazu zwei Diagonalen, wie im angeführten Beispiele bei der Figur 57., erforderlich, so wird dadurch das Vieleck in drei Theile getheilt, und überhaupt

durch m — 1 solche Diagonalen wird das Vieleck in m Figuren getheilt, welche nur hohle Winkel enthalten.

V. Zusatz: Die Gränzen einer jeden einzelnen Figur bestehen jetzt aus den gezogenen Diagonalen, und aus den Seiten des Vieleckes.

Die erste Diagonale *AE* (Fig. 57.) und die Vieleckseiten *AB*, *BC*, *CD* und *DE* bilden den Umfang des ersten Theiles; — zur Gränze des zweiten Theiles gehören nebst den Seiten EF, FG, *AM* und LM die Diagonalen *AE* und GL; — ferner erhellet, daß eben so bei jedem folgenden Theile zum Umfange, wenn das Vieleck in mehr als drei Theile getheilt wird, nebst einer gewissen Anzahl von Polygonsseiten noch zwei Diagonalen gehören; — bei dem letzten Theile aber bilden die Polygonsseiten GH, HJ, JK und KL mit der Diagonal GL die Gränze desselben.

Kommen also auf den ersten Theil p, auf den zweiten q, auf den dritten r u. s. w., und endlich auf den letzten Theil w Seiten des Polygons, so daß also $p + q + r + \ldots + w = n$, das ist, der Anzahl aller Seiten des gegebenen Vieleckes gleich ist, so besteht der Umfang mit Einschluß der Diagonalen bei dem ersten Theile aus $p + 1$, bei dem zweiten Theile aus $q + 2$, bei dem dritten Theile aus $r + 2$ u. s. w., und bei dem letzten Theile aus $w + 1$ Seiten und Diagonallinien.

VI. Zusatz: In einem Vielecke von n Seiten kann man, wenn es nebst hohlen auch erhabene Winkel enthält, ebenfalls $n - 3$ Diagonalen ziehen, wie bei Figuren mit lauter hohlen Winkeln (Zus. I.).

Denn man kann durch Diagonalen die erhabenen Winkel in hohle, und dadurch das Vieleck in mehrere Theile zerlegen, welche nur hohle Winkel enthalten (Zus. III.); sind nun $m - 1$ solche Diagonalen erforderlich, so bekommt man m Figuren mit lauter hohlen Winkeln (Zus. IV.).

Nebst den schon bei der Abtheilung des Polygons gezogenen $m - 1$ Diagonalen lassen sich noch nach dem I. Zusatze folgende neue Diagonalen ziehen:

bei dem 1sten Theile $p + 1 - 3 = p - 2$,
bei dem 2ten Theile $q + 2 - 3 = q - 1$,
bei dem 3ten Theile $r + 2 - 3 = r - 1$, u. s. w.,
bei dem letzten Theile $w + 1 - 3 = w - 2$.

Addirt man die neuen Diagonalen, so ist ihre Summe nach dem V. Zusatze $= p + q + r + \ldots + w = n$, davon abgezogen $m + 2$, das ist, eine Zahl, die um 2 größer ist, als die Anzahl der vorhandenen Theile, da m die Anzahl der Theile ausdrückt, und beim ersten und letzten Theile die Zahl 2, bei jedem mittleren Theile aber 1, somit die Zahl $m + 2$ abzuziehen ist; deßhalb ist die Anzahl der neuen Diagonalen, die nach der Abtheilung noch gezogen werden können, gleich $n - (m + 2) = n - m - 2$ (Arithm. III. §. 49.).

Addirt man endlich die anfangs zur Abtheilung gezogenen Diagonalen $m - 1$ dazu, so ist die ganze Anzahl aller möglichen Diagonalen $= n - m - 2 + m - 1 = n - 3$ (Arithm. III. §. 47.); das ist, auch bei Vielecken mit erhabenen Winkeln lassen sich so viele Diagonalen ziehen, als Seiten da sind, weniger drei.

VII. Zusatz: Ein Vieleck von n Seiten, wenn es nebst hohlen auch erhabene Winkel enthält, läßt sich, wie ein Vieleck mit lauter hohlen Winkeln (Zus. II.), durch Diagonalen in $n - 2$ Dreiecke theilen.

Denn man theile die erhabenen Winkel durch Diagonalen in hohle, und dadurch das Vieleck in mehrere Theile mit lauter hohlen Winkeln, so kann man nach dem II. Zusatze
den 1sten Theil in $p + 1 - 2 = p - 1$,
den 2ten Theil in $q + 2 - 2 = q$,
den 3ten Theil in $r + 2 - 2 = r$, u. s. w., und
den letzten Theil in $w + 1 - 2 = w - 1$ Dreiecke zerlegen.

Daher ist auch bei einem solchen Vielecke die Summe aller Dreiecke $= p + q + r + \ldots + w - 2 = n - 2$, das ist, man bekommt so viele Dreiecke, als Seiten da sind, weniger zwei.

Hat man nun z. B. ein Vieleck, das durch zwölf

Sei-

Seiten begränzt ist, so kann man dabei 12 — 3 = 9 Diagonalen ziehen, und dadurch das Polygon in 12 — 2 = 10 Dreiecke theilen, dasselbe mag nur hohle Winkel, oder, wie Figur 57., nebst hohlen auch erhabene Winkel haben.

§. 53.

I. Lehrsatz:

Im Vielecke von n Seiten ist die Summe aller Polygonswinkel gleich 180 Grad, multiplizirt durch die um 2 verminderte Anzahl der Seiten, das heißt,

$$S = 180^\circ(n - 2) = n \,.\, 180^\circ - 360^\circ.$$

Beweis:

1) Das Vieleck mag nur hohle, oder nebst hohlen auch erhabene Winkel haben, so kann man es immer durch Diagonalen in n — 2 Dreiecke theilen (§. 52. Zus. II. und VII.);

2) Die drei Winkel eines Dreieckes haben zusammen 180 Grad, also die Winkel von n — 2 Dreiecken haben zusammen (n — 2)mal 180 Grad, oder 180° × (n — 2);

3) Alle Dreieckswinkel zusammen geben die Vieleckswinkel; mithin ist bei einem Vielecke die Summe aller Polygonswinkel gleich 180 Grad, multiplizirt durch die um 2 verminderte Anzahl von Seiten; d. h.,

$$S = 180^\circ(n - 2) = n \,.\, 180^\circ - 360^\circ.$$

Daher ist z. B. beim Siebenecke (Fig. 56.) die Summe aller Vieleckswinkel oder $S = 180^\circ(7 - 2) = 180^\circ \times 5 = 900^\circ$; und beim Zwölfecke (Fig. 57.) ist die Summe aller Winkel oder $S = 180^\circ(12 - 2) = 180^\circ \times 10 = 1800^\circ$.

I. Zusatz: Im regulären Vielecke von n Seiten ist der Polygonswinkel gleich dem Reste, den man erhält, wenn man von 180 Grad den nten Theil von 360 Grad subtrahirt; d. h., er ist $= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$.

Denn nach dem Lehrsatze ist die Summe aller Winkel, oder

$$S = n \cdot 180^\circ - 360^\circ,$$

dann $n = n$,

also $\frac{1}{n}S = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ (Arithm. III. §. 53. Lehrs. III.).

Der $n$te Theil von S, oder $\frac{1}{n}S$ ist aber der Polygonswinkel des regulären Vieleckes, weil bei diesem alle Winkel einander gleich sind (§. 13. b.).

Daher ist z. B. im regulären Fünfecke der Polygonswinkel $= 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$; dann im regulären Sechsecke ist der Polygonswinkel $= 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

II. Zusatz: Je mehr Seiten das reguläre Vieleck hat, desto größer wird der Polygonswinkel. Denn es ist in einem regulären Vielecke von n Seiten der Polygonswinkel $= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$; wird nun n, das ist, die Anzahl der Seiten oder Winkel größer, so wird der Werth des Bruches $\frac{360^\circ}{n}$ kleiner (Arithm. III. §. 66. h.), und deßhalb die Differenz $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$, oder der Polygonswinkel um so größer, je größer die Anzahl der Seiten wird (Arithm. I. §. 34. III.).

Anmerkung: Bei einem Vielecke mit lauter hohlen Winkeln kann man auch zum Beweise des aufgestellten Lehrsatzes von einem innerhalb liegenden Punkte an alle Ecke gerade Linien ziehen; man bekommt dadurch so viele Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat, mithin n Dreiecke, derer Winkel zusammen n . 180° betragen (§. 43.). Alle Winkel um den in der Figur angenommenen Punkt haben zusammen 360 Grad (§. 8. Zus. VI.), und müssen abgezogen werden, weil sie zu den

Vieleckswinkeln nicht gehören. Daher ist jetzt wieder die Summe aller Vieleckswinkel oder $S = n \cdot 180^\circ - 360^\circ = 180^\circ(n - 2)$ (Arithm. III. §. 87.).

§. 54.

II. Lehrsatz:

Ein Vieleck ist vollkommen bestimmt,

a) Wenn außer zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, oder

b) Außer einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln, oder

c) Außer drei unmittelbar auf einander folgenden Winkeln, alle übrigen Seiten und Winkel gegeben sind, oder auch

d) Wenn alle Seiten und Diagonalen gegeben sind.

Beweis von a:

1) Sind (Fig. 56.) im Vielecke ABCDEFG alle Seiten und Winkel außer den Seiten AG und GF und dem eingeschlossenen Winkel G gegeben, so sind, wenn man durch die Diagonalen vom Ecke A aus die Figur in Dreiecke theilt, im Dreiecke ABC durch die gegebenen Seiten AB und BC und den eingeschlossenen Winkel B die übrigen zwei Winkel h und u sammt der dritten Seite AC gegeben (§. 20. Zus.);

2) Aus dem nämlichen Grunde sind auch die folgenden Dreiecke ACD, ADE und AEF bestimmt;

3) Beim letzten Dreiecke AFG ist der Winkel n durch die Winkel F und o, und der Winkel m durch den Winkel A und die Winkel h, i, k und l bestimmt, weßhalb das Dreieck AGF selbst, und somit auch die Seiten AG und GF und der Winkel G vollkommen bestimmt sind.

Beweis von b:

1) Sind (Fig. 56.) im Vielecke alle Seiten und alle Winkel außer der Seite AG und den beiden an-

liegenden Winkeln A und G gegeben, so sind, wenn man durch Diagonalen die Figur auf die vorige Weise in Dreiecke theilt, im Dreiecke ABC durch die Seiten AB und BC und den eingeschlossenen Winkel B die Stücke AC, dann h und u bestimmt (§. 20. Zus.);

2) Eben so sind auch die mittleren Dreiecke ACD, ADE und AEF bestimmt;

3) Im letzten Dreiecke AGF sind die Seiten AF und FG bestimmt, und der Winkel n ist es durch die Winkel F und o, weßhalb auch das Dreieck AFG, und die Seite AG mit den Winkeln m und G bestimmt ist;

4) Es ist aber $h + i + k + l + m = A$; daher sind im Vielecke durch die gegebenen Seiten auch die Winkel A und G gegeben, und das Vieleck ist vollkommen bestimmt.

Beweis von c:

1) Sind im vorigen Vielecke alle Seiten und alle Winkel außer den drei unmittelbar auf einander folgenden Winkeln A, G und F gegeben, und man zieht von A aus zu den übrigen Ecken die Diagonalen, so sind aus den vorhin angeführten Gründen die Dreiecke ABC, ACD, ADE und AEF vollkommen bestimmt;

2) Das letzte Dreieck AFG ist durch die Diagonal AF und die gegebenen Seiten AG und GF bestimmt, und deßhalb sind es auch die drei Winkel m, G und n;

3) Die Winkel h, i, k, l, und m geben zur Summe den Winkel A, und o und n geben den Winkel F, das ist, $h + i + k + l + m = A$, und $o + n = F$.

Es sind also auch durch die gegebenen Stücke die drei Winkel A, G und F gegeben, und das Vieleck ist wieder vollkommen bestimmt.

Beweis von d:

1) Sind endlich alle Seiten und alle Diagonalen gegeben (Fig. 56 und 57.), so hat man Dreiecke, wo allemal drei Seiten gegeben sind; um deßwillen sind

auch alle ihre Winkel gegeben, und die Dreiecke selbst vollkommen bestimmt (§. 24. Zus.);

2) Die Dreieckswinkel geben zusammen genau die Winkel des Vielecks.

Daher sind durch alle Seiten und Diagonalen alle Winkel des Vielecks bestimmt, und das Vieleck selbst ist dadurch vollkommen bestimmt.

I. Zusatz: Wenn demnach bei zwei gleichnamigen Vielecken bekannt ist, daß der Ordnung nach alle gleichnamigen Winkel und Seiten (§. 13. d.) außer zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, oder außer einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln, oder außer drei unmittelbar auf einander folgenden Winkeln gleich sind, oder wenn alle Seiten und Diagonalen einander gleich sind, so sind die Vielecke kongruent.

II. Zusatz: Zwei gleichnamige reguläre Figuren (§. 13. b.), die eine Seite gleich haben, sind kongruent; weil sie dann auch alle übrigen Seiten, und zugleich alle Winkel gleich haben (§. 53. Zus. I.).

Anmerkung: 1) Daß ein Vieleck, wenn es nebst hohlen auch erhabene Winkel hat, unter der im vorstehenden Lehrsatze gesetzten vierfachen Bedingung bestimmt oder gegeben ist, wird in der Polygonometrie, welche im III. Theile dieses Lehrbuches vorkommen wird, näher nachgewiesen werden; der hier angegebene Beweis beschränkt sich, wie beim Vierecke (§. 47.), auf geradlinigte ebene Figuren, die lauter hohle Winkel haben. In der Polygonometrie wird zugleich dargethan, daß eine geradlinigte ebene Figur auch bestimmt ist, wenn überhaupt außer zwei Seiten und einem Winkel, dann außer einer Seite und zwei Winkeln, und außer drei Winkeln alle übrigen Seiten und Winkel gegeben sind, es mögen die unbekannten Stücke neben einander liegen oder unmittelbar auf einander folgen, oder nicht.

2) Wie aus den gegebenen Stücken sowohl bei Dreiecken, als auch bei Vierecken und bei Vielecken überhaupt die unbekannten Stücke durch Rechnung gefunden werden können, wird in den folgenden Theilen dieses Lehrbuches in der Trigonometrie und Polygonometrie gezeigt werden. Die hier aufgestellten Lehrsätze geben für jetzt nur einige Bedingungen an, unter denen die geradlinigten ebenen Figuren gegeben oder bestimmt sind (§. 6.)

V. Abschnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien in Betreff des Kreises, und vom Maaße der Winkel.

---

§. 55.

I. Lehrsatz:

Eine gerade Linie kann die Kreislinie nur in zwei Punkten schneiden.

Beweis:

1) Man nehme (Fig. 58.) in der um G beschriebenen Kreislinie die zwei Punkte C und D an, und ziehe durch sie die gerade Linie AB;

2) Würde die gerade Linie AB die Kreislinie nebst den Punkten C und D noch in einem dritten Punkte schneiden, so müßte dieser zwischen C und D, wie E, oder außer denselben, wie F, liegen;

3) Man ziehe nun vom Zentrum des Kreises die geraden Linien GE und GF, und die Halbmesser GC und GD, so ist, weil das Dreieck CGD gleichschenklicht ist (§. 14. Zus. IV.), der Winkel $m = p$ (§. 21. Zus. I.); ferner der äußere Winkel o ist größer als p (§. 28. Zus. I.), also ist auch $o > m$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 5.); und daher $GC > GE$ (§. 30. Zus. I.), weßhalb die Linie GE kein Halbmesser des Kreises ist, und der Punkt E innerhalb des Kreises liegt;

4) Weil der Winkel m spitzig ist (§. 28. Zus. V.), so ist sein Nebenwinkel n stumpf (§. 9. Zus. V.), und das Dreieck GCF ist stumpfwinklicht, weßhalb da die Seite GF größer als der Radius GC ist (§. 30. Zus. IV.), und der Punkt F außerhalb des Kreises liegt.

Es schneidet also die gerade Linie AB die Kreislinie nur in den zwei Punkten C und D.

§. 56.

II. Lehrsatz:

Das Perpendikel, welches vom Mittelpunkte des Kreises auf eine Sehne gezogen wird, theilet die Sehne in zwei gleiche Theile.

Beweis:

1) Zieht man (Fig. 59.) in dem um C beschriebenen Kreise vom Zentrum auf die Sehne AB das Perpendikel CD, und die Radien AC und CB, so ist das Dreieck ACB gleichschenklicht (§. 14. Zus. IV.);

2) Wird im gleichschenklichten Dreiecke von der Spitze ein Perpendikel auf die Basis gezogen, so wird diese halbirt (§. 36. Zus. II.).

Daher theilet ein Perpendikel aus des Kreises Mittelpunkte die Sehne in zwei gleiche Theile.

I. Zusatz: Wenn man durch eine gerade Linie vom Mittelpunkte des Kreises aus die Sehne halbirt, so steht diese auf der Sehne senkrecht. Denn (Fig. 59.) das Dreieck ACB ist gleichschenklicht, und die gerade Linie CD, welche vom Scheitel C aus die Basis AB halbirt, steht auf AB senkrecht (§. 36.); daher die gerade Linie, welche vom Mittelpunkte der Sehne zum Zentrum des Kreises gezogen wird, allemal auf die Sehne senkrecht steht.

II. Zusatz: Die senkrechte Linie, welche in der nämlichen Ebene die Sehne halbirt, geht durch den Mittelpunkt des Kreises. Denn (Fig. 59.) läge das Zentrum C nicht im Perpendikel DF, welches vom Mittelpunkte der Sehne auf sie gezogen wird, so würde das von C auf AB gezogene Perpendikel auf den Mittelpunkt der Sehne fallen (Lehrs.), und es gäbe in der nämlichen Ebene vom nämlichen Punkte D auf AB zwei verschiedene Perpendikel, was nicht möglich ist (§. 32. Zus. II.).

III. Zusatz: Der Radius, welcher auf die Sehne perpendikulär gezogen wird, halbirt die Sehne (Lehrs.), und umgekehrt der Halbmesser des Kreises,

welcher die Sehne in zwei gleiche Theile theilet, steht auf dieselbe senkrecht (Zus. I.).

IV. Zusatz: Vom Mittelpunkte des Kreises kann auf eine Sehne nur ein einziges Perpendikel gezogen werden (§. 33. Zus. I.), und dieses ist unter allen Linien, die vom Zentrum auf die Sehne möglich sind, die kürzeste Linie (§. 33. Zus. II.); daher bestimmt dieses Perpendikel die Entfernung oder den Abstand der Sehne vom Zentrum.

§. 57.

I. Aufgabe, zu einem gegebenen Kreise den Mittelpunkt zu suchen.

Auflösung:

1) Man nehme (Fig. 60.) in der Peripherie des um C beschriebenen Kreises drei beliebige Punkte *A*, B und D an, und ziehe die Sehnen *A*B und BD;

2) Man errichte durch die Mittelpunkte dieser beiden Sehnen in der nämlichen Ebene zwei Perpendikel, die sich in einem Punkte durchschneiden, welcher das gesuchte Zentrum des Kreises ist.

Beweis:

1) Die auf diese Weise gezogenen Perpendikel schneiden sich allemal in einem Punkte (§. 42.);

2) Der Mittelpunkt des Kreises liegt in beiden Perpendikeln (§. 56. Zus. II.), die nur den einzigen Punkt C gemein haben (§. 3. Zus. IV.); deßhalb ist der Durchschnittspunkt C das gesuchte Zentrum des Kreises.

§. 58.

II. Aufgabe, einen Kreis zu verzeichnen, dessen Peripherie durch drei gegebene Punkte geht, die in der nämlichen Ebene nicht in einer einzigen geraden Linie liegen.

Auflösung:

1) Sind (Fig. 60.) die drei Punkte *A*, B und D gegeben, die in der nämlichen Ebene nicht in einer ge-

raden Linie liegen, und man soll durch sie eine Kreislinie beschreiben, so verbinde man diese Punkte durch die geraden Linien *A*B und BD;

2) Man theile jede dieser Linien in ihrer Ebene durch ein Perpendikel in zwei gleiche Theile (§. 27. Zus. I.), so werden sich diese Perpendikel in einem Punkte C durchschneiden (§. 42.);

3) Man ziehe nun aus C mit dem Halbmesser C*A*, der die Entfernung des Durchschnittspunktes C von einem der gegebenen Punkte ausdrückt, in der Ebene dieser drei Punkte eine Kreislinie, so geht diese durch die drei gegebenen Punkte.

Beweis:

1) Zieht man vom Durchschnittspunkte C zu den drei gegebenen Punkten die geraden Linien C*A*, CB und CD, so ist

$$\left.\begin{array}{llll} & AE = EB, & \text{ferner} & BH = HD, \\ & m = n = 90^\circ, & & o = p = 90^\circ, \\ \text{und} & EC = EC, & \text{und} & CH = CH, \end{array}\right\} \text{Nro. 2.}$$

also $\triangle AEC \cong \triangle EBC$, also $\triangle BCH \cong \triangle CHD$ (§. 20.),
somit CA = CB; mithin CB = CD (§. 18. Zus. IV.);

2) Es ist also C*A* = CB = CD; und die Kreislinie, welche auf die angezeigte Weise mit dem Halbmesser C*A* beschrieben wird, geht durch die drei gegebenen Punkte *A*, B und D.

I. Zusatz: Durch drei Punkte, die in der nämlichen Ebene nicht in einer geraden Linie liegen, ist die Kreislinie und der Kreis vollkommen bestimmt. Denn durch diese drei Punkte ist die Lage des Mittelpunktes C, und die Größe des Radius CA gegeben, und daher die Kreislinie und der Kreis selbst vollkommen bestimmt (§. 15.).

II. Zusatz: Zwei Kreislinien können einander nur in zwei Punkten schneiden. Denn hätten die Peripherien noch einen dritten Punkt gemein, so wären dieselben nicht zwei verschiedene Kreislinien, sondern nur eine Kreislinie (Zus. I.).

Anmerkung: In der angeführten Figur 60. der IV. Tabelle ist von C nach B die fehlende gerade Linie CB zu ergänzen.

§. 59.

Zentriwinkel und Peripheriewinkel, dann Ausschnitt und Abschnitt des Kreises.

a) Ein Winkel, den zwei Radien im Mittelpunkte des Kreises bilden, heißt ein Zentriwinkel (Angulus centri).

b) Ein Winkel zweier Sehnen, dessen Scheitel in der Peripherie des Kreises liegt, heißt ein Peripheriewinkel (Angulus peripheriae).

c) Der zwischen zwei Radien und ihrem Bogen enthaltene Theil der Kreisebene heißt ein Ausschnitt (Sector); und

d) Der zwischen der Sehne und ihrem Bogen eingeschlossene Theil derselben heißt ein Abschnitt des Kreises (Segmentum circuli).

Daher ist (Fig. 61.) der Winkel ACB ein Zentriwinkel, und (Fig. 62.) der Winkel abf ist ein Peripheriewinkel; ferner (Fig. 61.) das Flächenstück ACBD ist ein Ausschnitt, und das Stück ADB des um C beschriebenen Kreises ist ein Abschnitt oder Segment dieses Kreises.

§. 60.

III. Lehrsatz:

In zwei Kreisen von gleichen Halbmessern gehören zu gleichen Zentriwinkeln gleiche Sehnen, gleiche Bögen, und kongruente Ausschnitte und Abschnitte.

Beweis:

1) Wenn (Fig. 61 und 62.) in den beiden um C und c beschriebenen Kreisen die Halbmesser gleich sind, mithin AC = ac und BC = bc, so ist, da nach der Annahme der Winkel ACB = acb, das Dreieck ACB mit dem Dreiecke acb kongruent (§. 20.);

2) Daher ist die Seite AB = ab (§. 18. Zus. IV.), das ist, zu gleichen Zentriwinkeln gehören gleiche Sehnen.

3) Man lege die beiden Ausschnitte ACDB und acdb so auf einander, daß AC auf ac fällt, und sich die kongruenten Dreiecke ACB und acb genau decken, so fällt CB längs cb, und der Punkt B auf b, und jeder Punkt des Bogens ADB auf einen Punkt des Bogens adb, weil sonst gegen die Voraussetzung die Radien der Kreise verschieden wären.

Es decken sich also auch die Bögen, Ausschnitte und Abschnitte, und sind daher, wie die Sehnen, kongruent.

I. Zusatz: Im nämlichen Kreise gehören zu gleichen Zentriwinkeln gleiche Sehnen, gleiche Bögen, und kongruente Ausschnitte und Abschnitte. Denn (Fig. 61.) wenn der Zentriwinkel ACB = GCF, so ist, weil im nämlichen Kreise die Radien AC und GC, dann CB und CF einander gleich sind, das Dreieck ACB mit GCF kongruent, und deßhalb die Sehne AB = GF; legt man ferner die Kreisausschnitte ACBD und GCFK so auf einander, daß sich die kongruenten Dreiecke ACB und GCF genau decken, so decken sich auch wegen der Gleichheit der Radien die Bögen ADB und GKF, dann die Ausschnitte ACBD und GCFK, und die Abschnitte ADB und GKF, und sind daher kongruent.

II. Zusatz: Durch den gegebenen Zentriwinkel eines bestimmten Kreises ist die Sehne, der Bogen, der Ausschnitt und der Abschnitt dieses Winkels vollkommen bestimmt. Denn (Fig. 61.) durch den Zentriwinkel ACB ist die Lage der Punkte A und B, und dadurch die Sehne AB bestimmt; nun ist ferner außer dem Bogen ADB zwischen A und B wegen der Gleichheit der Radien des Kreises kein anderer Kreisbogen mehr möglich, somit ist der Bogen ADB, und deßhalb auch der Ausschnitt ACBD, und der Abschnitt ADB des Zentriwinkels gegeben.

III. Zusatz: In einem Kreise, oder in verschiedenen Kreisen von gleichen Halbmessern gehören zu

gleichen Sehnen gleiche Zentriwinkel, gleiche Bögen, und kongruente Ausschnitte und Abschnitte. Denn (Fig. 61 und 62.) wenn AB = GF = ab, so ist △ ACB ≅ △ GCF ≅ △ acb (§. 24.); woraus vermöge des Lehrsatzes und des I. Zusatzes das Uibrige folgt.

IV. Zusatz: Eine gerade Linie, welche den Zentriwinkel halbirt, halbirt auch die Sehne, den Bogen, den Ausschnitt und den Abschnitt. Denn (Fig. 62.) die gerade Linie cd, welche den Zentriwinkel halbirt, halbirt auch die Sehne und steht darauf senkrecht (§. 36. Zus. I.), und daraus folgt kraft des I. Zusatzes, daß die gerade Linie cd auch den Bogen, den Ausschnitt und den Abschnitt halbirt.

V. Zusatz: Ein Perpendikel, welches in einer Ebene die Sehne halbirt, theilet auch den Zentriwinkel, den Bogen, den Ausschnitt und den Abschnitt in zwei gleiche Theile. Denn (Fig. 62.) wenn das Perpendikel cd die Sehne halbirt, so geht es durch den Mittelpunkt des Kreises (§. 56. Zus. II.), und halbirt sowohl den Zentriwinkel (§. 36. Zus. II.), als auch den Bogen, den Ausschnitt und den Abschnitt (Zus. IV.).

VI. Zusatz: Eine Sehne, die nicht ein Durchmesser ist, theilet die Pheripherie und die Kreisebene in zwei ungleiche Theile, von welchen der größere auf der Seite des Zentrums liegt.

Es sei (Fig. 62.) die Sehne gb gegeben, welche kein Durchmesser ist (§. 14. f.), und man ziehe von b aus den Durchmesser bf, so ist baf = bgf (§. 14. Zus. VI.), nun ist bhg < bgf, und baf = bgf, daher ist der Bogen bgf > bhg (Arithm. I. §. 10. Nro. 3. und Nro. 5 bis 7.); und eben so ist der Ausschnitt bagc größer als der Ausschnitt bhgc.

Anmerkung: Daß (Fig. 16.) der Durchmesser AB sowohl die Kreislinie, als auch die Kreisebene in zwei kongruente Theile theilet (§. 14. Zus. VI.), erkennt man auch aus dem, daß der obere gerade Zentriwinkel ACB dem unteren ACB gleich ist (§. 7. Zus. I.), und zu gleichen Zentriwinkeln kongruente Bögen und Ausschnitte gehören (§. 60. Zus. I.).

§. 61.

IV. Lehrsatz:

In jedem Kreise gibt der vielfache Zentriwinkel den vielfachen Bogen.

Beweis:

1) Wenn (Fig. 63.) der Zentriwinkel ACB = BCD, und also ACD = ACB + BCD = 2ACB, so ist der Bogen AD des Zentriwinkels ACD = 2AB, weil AB = BD (§. 60. Zus. I.), mithin AD = AB + BD, und also AD = 2AB;

2) Ist ACB = BCD = DCE, und also ACE = 3ACB, so ist wieder nach dem I. Zusatze des §. 60. der Bogen AB = BD = DE, somit AE = 3AB, und der Zentriwinkel ACE = 3ACB gibt den Bogen AE = 3AB;

3) Da man nun aus den nämlichen Gründen diese Schlüsse immer fortsetzen, und für jede nächst größere Zahl wiederholen kann, so gibt m . ACB den Bogen m . AB, das heißt, wenn im Kreise ein Zentriwinkel mmal so groß ist, als ACB, so ist auch sein Bogen mmal so groß als der Bogen AB des Winkels ACB.

I. Zusatz: Die Zentriwinkel stehen mit ihren Bögen im geraden Verhältnisse, indem nach dem Lehrsatze mit der Zunahme der Zentriwinkel eben so die Zunahme der Bögen verbunden ist (Arithm. II. §. 58. a.).

II. Zusatz: Die Zentriwinkel sind mit ihren Bögen gerade proportionirt, oder, wie man sich auch ausdrückt, sie verhalten sich, wie ihre Bögen. Hat man (Fig. 63.) die Zentriwinkel ACB und BCF, so bilden sie mit ihren Bögen AB und BF zwei gleiche geometrische Verhältnisse (Arithm. II. §. 51.), das ist, es verhält sich ACB : BCF = AB : BF (Arithm. IV. Thl. II. Auflage. §. 104.).

III. Zusatz: Im Kreise gehören zu gleichen Bögen gleiche Zentriwinkel, gleiche Sehnen, gleiche Ausschnitte, und gleiche Abschnitte. Denn (Fig. 63.) es verhält sich ACB : BCD = AB : BD (Zus. II.); ist

nun der Bogen AB = BD, so ist auch der Zentriwinkel ACB = BCD (Arithm. IV. §. 35. Zus. II.), und daraus folgt das Uibrige nach dem I. Zus. des §. 60.

IV. Zusatz: Ein größerer Zentriwinkel hat einen größeren Bogen, und ein größerer Bogen einen größeren Zentriwinkel. Denn (Fig. 63.) es verhält sich ACD : ACB = AD : AB (Zus. II.); ist nun der Zentriwinkel ACD > ACB, so ist auch der Bogen AD > AB; und umgekehrt, wenn der Bogen AD > AB, so ist auch der Zentriwinkel ACD > ACB (Arithm. IV. §. 35. Zus. II.).

Anmerkung: Da im IV. Theile meines Lehrbuches der Arithmetik in der ersten Auflage der nach dessen zweiter Auflage im §. 104. angeführte Lehrsatz, daß beim geraden Verhältnisse die Größen zu einander gerade proportionirt sind, nicht vorkommt, so kann derselbe auch aus meiner Anleitung zur Begründung und Anwendung des reesischen Ansatzes im §. 9. nachgewiesen werden. Im II. Theile dieses Lehrbuches ist dieser Satz im §. 59. nur als Lehrsatz angeführt.

§. 62.

Die Eintheilung der Kreislinie in Halbkreise, Quadranten und Sextanten, wie auch in Grade, Minuten und Sekunden.

a) Die Hälfte der Kreislinie heißt ein Halbkreis (Semiperipheria), der vierte Theil ein Quadrant (Quadrans), und der sechste Theil ein Sextant (Sextans).

b) Der 360ste Theil der Kreislinie wird ein Grad, der 60ste Theil eines Grades eine Minute, und der 60ste Theil einer Minute eine Sekunde genannt.

I. Zusatz: Ein Halbkreis hält 180, ein Quadrant 90, und ein Sextant 60 Grad.

II. Zusatz: Wenn der Zentriwinkel ein rechter Winkel ist, so ist sein Bogen ein Quadrant.

Ist (Fig. 63.) der Zentriwinkel ACE ein rechter Winkel, und man verlängert den Schenkel EC bis G, so ist sein Nebenwinkel ACG auch ein rechter Winkel (§. 9. Zus. III.), und somit der Winkel ACE = ACG;

ferner zu gleichen Zentriwinkeln gehören gleiche Bögen (§. 60.), also ist der Bogen AE = AG, dann AE = ½GAE, und der Bogen GAE ist, da EG ein Durchmesser ist, die Hälfte der Peripherie (§. 14. Zus. VI.); daher ist AE der vierte Theil der Peripherie, das heißt, der Bogen ist ein Quadrant, wenn sein Zentriwinkel ein rechter Winkel ist.

III. Zusatz: Der Zentriwinkel hält so viele Grade, Minuten rc. als sein Bogen.

Ist (Fig. 63.) der Zentriwinkel ACE ein rechter Winkel, und ACB ein Zentriwinkel von beliebiger Größe, so verhält sich in Gemäßheit des II. Zusatzes des §. 61. der Winkel ACE : ACB = AE : AB; da nun ACE als ein rechter Winkel 90 Grad hält (§. 11. Zus. I.), und nach dem II. Zusatze sein Bogen ein Quadrant ist, und deßhalb auch 90 Grad hält (Zus. I.), so ist auch der Winkel ACB in der Hinsicht seinem Bogen AB gleich, daß beide, Winkel und Bogen, gleich viele Grade, Minuten rc. haben, das heißt, ACB = arc. AB.

Anmerkung: 1) In Frankreich wird die Kreislinie in 4 Theile, oder in 4 Quadranten, ein Quadrant in 100 Grade, ein Grad in 100 Minuten, und eine Minute in 100 Sekunden getheilt.

2) Bei der Eintheilung des Kreises werden die Grade, Minuten und Sekunden, wie bei der Eintheilung des rechten Winkels (§. 11.), mit den Zeichen »° ′ ″« bezeichnet, und man schreibt z. B. »ein gewisser Kreisbogen hat 24° 14′ 16″, anstatt 24 Grad 14 Minuten 16 Sekunden.«

3) Statt daß man schreibt »der Bogen AB« schreibt man auch manchmal »arcus AB«, oder kürzer »arc. AB.«

§. 63.

Maaß der Winkel.

a) Unter dem Maaße der Winkel versteht man einen Winkel von bestimmter Größe, den man gebraucht, um die Größe der übrigen Winkel zu bestimmen. Weil alle rechte Winkel einander gleich sind, und bei ihnen immer ein Schenkel auf den anderen

senkrecht steht, so nimmt man den rechten Winkel als das Maaß der Winkel an.

b) Einen Winkel messen heißt sein Verhältniß zum rechten Winkel als dem angenommenen Maaße bestimmen, das ist, angeben, wie oft der rechte Winkel, oder ein aliquoter Theil desselben gesetzt werden muß, um den Winkel zu erhalten, welcher gemessen wird (Arithm. IV. §. 33. Nro. 1.).

I. Zusatz: Weil der rechte Winkel in Grade, Minuten ꝛc. eingetheilt wird (§. 11.), so wird ein Winkel auch gemessen, wenn man seine Größe in Graden, Minuten ꝛc. angibt.

II. Zusatz: Der Bogen mißt seinen Zentriwinkel, da er mit ihm gleich viele Grade, Minuten ꝛc. hat (§. 62. Zus. III.); das heißt, der Zentriwinkel ist seinem Bogen gleich, oder (Fig. 63.) ACB = arc. AB.

§. 64.

V. Lehrsatz:

In ungleichen Kreisen haben die Bögen gleicher Zentriwinkel gleich viele Grade, Minuten ꝛc.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 63 u. 64.) die Radien AC und ac der um C und c beschriebenen Kreise ungleich, und deßhalb die Kreise selbst ungleich oder verschieden (§. 15. Zus. IV.);

2) Man bilde sich im Kreise um C den rechten Winkel ACE, und im Kreise um c den rechten Winkel ace, nehme im ersten Kreise den beliebigen Zentriwinkel ACB an, und mache im zweiten Kreise den Zentriwinkel acb = ACB;

3) Weil die Zentriwinkel mit ihren Bögen im geraden Verhältnisse stehen (§. 61. Zus. I.), und deßwegen damit gerade proportionirt sind (§. 61. Zus. II.), so erhält man die zwei Proportionen:

ACE : ACB = AE : AB,
und ace : acb = ae : ab;

4)

4) Nach Nro. 2. ist ACE = ace, und ACB = acb, daher erhält man die neue Proportion (Arithm. IV. §. 43. Nro. 1.):

AE : AB = ae : ab;

5) In dieser Proportion ist AE = ae, da diese beiden Bögen Quadranten sind, und jeder 90 Grad hält (§. 62. Zus. II.); deßhalb ist auch der Bogen AB = ab (Arithm. IV. §. 35. Zus. III.), das ist, die Bögen AB und ab der gleichen Zentriwinkel ACB und acb halten gleich viele Grade, Minuten ꝛc., wenn auch die Kreise verschieden sind.

Zusatz: Man kann also den Winkel durch einen Bogen eines Kreises mit einem beliebigen Halbmesser messen, da der Bogen des kleineren Kreises beim nämlichen Zentriwinkel eben so viele Grade, Minuten ꝛc. hat, wie der Bogen des größeren Kreises.

Anmerkung: 1) Auf den Satz, daß der Zentriwinkel seinen Bogen mißt (§. 63. Zus. II.), gründet sich die mechanische Methode, die Winkel zu messen, und Winkel von einer gegebenen Anzahl Grade, Minuten ꝛc. zu zeichnen. Die Werkzeuge, derer man sich dazu bedient, heissen überhaupt Winkelmesser.

Der Winkelmesser, den man auf dem Papier gebraucht, wird ein Transporteur genannt; er besteht aus einem Halbkreise, den man auf Holz, Pappe, Horn oder Messing zeichnet, und genau in seine 180 Grad theilet.

Will man nun (Fig. 6.) einen gegebenen Winkel ABC auf dem Papier messen, so legt man das Zentrum des Transporteurs auf den Scheitel B, und den Radius auf den Schenkel BC, alsdann zeigt der andere Schenkel BA die Grade des Bogens auf dem Transporteur an, und eben so viele Grade hat der Zentriwinkel ABC.

Will man hingegen (Fig. 6.) auf einer geraden Linie BC in B einen Winkel von gewissen Graden zeichnen; so verfährt man, wie vorhin, und bemerkt den Punkt A, wo der gegebene Grad auf dem Papier liegt, und zieht die Linie BA, alsdann hat der gezeichnete Zentriwinkel CBA, wie sein Bogen, die gegebene Anzahl von Graden.

2) Besser sieht man die Einrichtung des Transporteurs, wenn man seinen Gebrauch vorzeigt, und somit das Instrument wirklich vor sich hat; aus diesem Grunde findet man ihn in den beigefügten Tabellen nicht abgezeichnet.

3) Von den Instrumenten, mit welchen auf dem Felde Winkel gemessen werden, wird in der praktischen Geometrie die Rede sein.

§. 65.

VI. Lehrsatz:

Die Sehne des Sextanten ist dem Radius gleich.

Beweis:

1) Ist (Fig. 64.) der Bogen fg des Kreises um c ein Sextant (§. 62. a.), und also gleich 60°, so hält der Zentriwinkel fcg dieses Bogens auch 60 Grad (§. 63. Zus. II.), und deßwegen beträgt die Summe der beiden übrigen Winkel f und g des Dreieckes fcg noch 120 Grad (§. 43. Zus. I.);

2) Das Dreieck fcg ist wegen der Gleichheit der Radien cf und cg gleichschenklicht, und deßwegen der Winkel $f = g$ (§. 21. Zus. I.), mithin $f = g = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ = fcg$.

3) Hat aber jeder Dreieckswinkel 60°, so sind die drei Winkel c, f und g einander gleich, und das Dreieck ist auch gleichseitig (§. 23. Zus. II.), also $fg = cf$, das heißt, die Sehne des Sextanten ist dem Radius gleich.

Zusatz: Weil die ganze Kreislinie sechs Sextanten hat (§. 62. a.), und nach dem Lehrsatze jede Sehne des Sextanten dem Radius gleich ist, so läßt sich der Radius sechsmal als Sehne an der Peripherie des Kreises auftragen.

§. 66.

VII. Lehrsatz:

Zwei gleiche Sehnen sind vom Mittelpunkte gleich weit entfernt, und Sehnen, von welchen der Mittelpunkt gleich weit absteht, sind gleich.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 61.) die Sehne AB = GF, und man ziehe die Radien CA, CB, CG und CF, wie auch vom Zentrum auf die beiden Sehnen die Perpendikel CH und CJ, um die Entfernungen des Zentrums von den Sehnen zu erhalten (§. 33. Zus. II.).

2) Die aus dem Mittelpunkte des Kreises gezogenen Perpendikel halbiren die Sehnen (§. 56.), es ist also AH = ½AB, und GJ = ½GF, und daher ist, wie nach der Voraussetzung AB = GF, auch

AH = GJ,
ferner AC = GC (§. 14. Zus. IV.),
H = J (§. 8. c. und d.),

also △ AHC ≌ △ GJC (§. 34. Zus. II.),
und CH = GF (§. 18. Zus. IV.);

das heißt, gleiche Sehnen sind vom Mittelpunkte gleich weit entfernt.

3) Sind dagegen die Entfernungen der Sehnen vom Mittelpunkte gleich, so ist aus den so eben bei Nro. 2. angeführten Gründen

CH = CJ,
ferner CA = CG,
und H = J = 90°,

also △ HCA ≌ △ GCJ,
und AH = GJ.

4) Weil die Perpendikel die Sehnen halbiren (§. 56.), so ist AH = ½AB, und GJ = ½GF, und also, weil AH = GJ, auch ½AB = ½GF, mithin AB = GF, das ist, Sehnen, die vom Mittelpunkte gleich weit entfernt sind, sind einander gleich.

Zusatz: Ungleiche Sehnen haben ungleiche Entfernungen vom Mittelpunkte, und bei ungleichen Entfernungen sind die Sehnen ungleich.

§. 67.

VIII. Lehrsatz:

Das Zentrum des Kreises steht von einer kleineren Sehne weiter ab, als von einer größeren, und eine Sehne, von welcher das Zentrum weiter absteht, ist kleiner.

Beweis:

1) Ist (Fig. 61.) die Sehne AB kleiner, als GL, so mache man den Zentriwinkel GCF gleich dem Winkel ACB (§. 25.), welcher zur kleineren Sehne AB gehört, und ziehe vom Zentrum aus zur Bestimmung der Entfernungen die Perpendikel CH, CJ und CM, so ist CJ > CN (Arithm. I. §. 10. Nro. 3.).

2) Die Linie CN ist im rechtwinklichten Dreiecke CNM die Hypotenus (§. 29. c.), und deßhalb größer als CM (§. 30. Zus. IV.), mithin ist auch CH > CM, das heißt, das Zentrum steht von einer kleineren Sehne weiter ab, als von einer größeren.

3) Steht umgekehrt C von AB weiter ab, als von GL, so ist die Sehne AB nicht gleich GL, weil sonst gegen die Voraussetzung auch CH gleich CM wäre (§. 66.); auch kann, wenn CH > CM, die Sehne AB nicht größer sein als GL, weil sonst nach Nro. 2. auch die Entfernung CH kleiner wäre, als der Abstand CM; also ist AB < GL, das heißt, diejenige Sehne ist kleiner, welche vom Mittelpunkte weiter entfernt ist.

Zusatz: Der Durchmesser ist die größte Sehne; weil er durch das Zentrum des Kreises geht, und somit seine Entfernung vom Mittelpunkte gleich Null ist: gleichwie man die kleinste Sehne hat, sobald ihre Entfernung vom Mittelpunkte den Halbmesser des Kreises beträgt.

§. 68.

IX. Lehrsatz:

Die Mitte des Halbkreises steht von dem Durchmesser, der seine beiden Endspunkte verbindet, weiter ab, als jeder andere Punkt des Halbkreises.

Beweis:

5) Es sei (Fig. 65.) der Halbkreis AQB gegeben, und AB der Durchmesser, der die beiden Endspunkte des Halbkreises verbindet, dann Q sei der Mittelpunkt, der von A und B gleich weit entfernt ist, und QR der vom Punkte Q aus gezogene Diameter; so ist der Bogen $\widetilde{AQ} = \widetilde{QB}$, und zu gleichen Bögen gehören gleiche Zentriwinkel (§. 61. Zus. III.), daher ist der Zentriwinkel ACQ = QCB;

2) Diese beiden Winkel sind Nebenwinkel, mithin, da sie einander gleich sind, rechte Winkel (§. 8. a. und c.), und der Durchmesser QR steht auf dem Diameter AB senkrecht, weßhalb der Radius QC die Entfernung des Mittelpunktes des Halbkreises von seinem Durchmesser AB angibt (§. 33. Zus. II.);

3) Nimmt man nun zwischen A und Q den beliebigen Punkt K an, und zieht man die Sehne KL senkrecht auf AB, so bestimmt die halbe Sehne KG (§. 56.) die Entfernung des Punktes K vom Diameter AB, und QR ist größer als KL (§. 14. Zus. VII.), weßhalb auch $\frac{1}{2}QR > \frac{1}{2}KL$, oder $QC < KG$; das heißt, der Mittelpunkt des Halbkreises AQB ist vom Diameter AB weiter entfernt, als jeder andere Punkt des Halbkreises.

Zusatz: Jeder Punkt des Halbkreises, der der Mitte näher liegt, steht vom Durchmesser desselben weiter ab, als ein Punkt, der sich von der Mitte des Bogens weiter entfernt.

Nimmt man (Fig. 65.) den Punkt K an, der der Mitte Q des Halbkreises AQB näher liegt, als der Punkt H, und zieht man auf den Durchmesser AB die

Sehnen KL und HJ senkrecht, so ist, weil FC > CG, die Sehne KL > HJ (§. 67.), und also $\frac{1}{2}$KL > $\frac{1}{2}$HJ, oder KG > HF (§. 56.), d. h., der dem Mittelpunkte näher liegende Punkt K ist vom Diameter dieses Halbkreises weiter entfernt, als der Punkt H.

§. 69.

X. Lehrsatz:

Die Mitte eines Kreisbogens steht von seiner Sehne weiter ab, als jeder andere Punkt des Bogens.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 65.) der Punkt Q die Mitte des Kreisbogens DQE, und DE die Sehne desselben;

2) Man ziehe die Radien CD und CE, dann durch C den Durchmesser AB mit DE parallel (§. 39.), und vom Punkte Q aus den Durchmesser QR (§ 15. Anm. 2.), so ist nach Nro. 1. der Bogen DQ = QE, mithin der Zentriwinkel DCQ = QCE (§. 61. Zus. III.), und im gleichschenklichten Dreiecke DCE (§. 14. Zus. IV.) steht die Linie CP oder RQ, welche den Winkel DCE halbirt, auf DE senkrecht (§. 36. Zus. I.);

3) Weil DE mit AB parallel gezogen ist, so ist QR auch auf AB senkrecht (§. 41. Zus. VIII.), und der Punkt Q ist auch die Mitte des Halbkreises AQB;

4) Man nehme im Kreisbogen DQE zwischen D und Q den beliebigen Punkt K an, und ziehe die Sehne KL senkrecht auf DE, so ist KL mit QR parallel (§. 38. Zus. I.), und das Viereck NGCP ist ein Parallelogramm (§. 48. a.), wo die Linie NG = PC (§. 48. Zus. V.);

5) Die Entfernung QC ist größer, als KG (§ 68.), weßhalb QC — PC > KG — NG (Arithm. I. §. 34. II.), und QP > KN, das ist, die Mitte eines Kreisbogens steht von der Sehne desselben weiter ab, als jeder andere Punkt des Bogens.

I. Zusatz: Auch auf der entgegengesetzten Seite steht die Mitte des Bogens von der Sehne weiter ab, als jeder andere Punkt dieses Bogens. Denn (Fig. 65.) aus den vorhin angeführten Gründen ist CR > GL, und CP = GN, also CP + CR > NG + GL (Arithm. I. §. 25. II.), mithin PR > NL, das ist, die Mitte R ist von der Sehne DE weiter entfernt, als jeder andere Punkt des Bogens DRE.

II. Zusatz: Jeder Punkt der beiden Bögen, in welche die Kreislinie durch eine Sehne getheilt wird (§. 14. Zus. V.), ist, wenn er der Mitte der Bögen näher liegt, weiter von der Sehne entfernt, als jeder andere Punkt, der weiter von der Mitte absteht.

Nimmt man nämlich (Fig. 65.) zwischen D und K den beliebigen Punkt H an, und zieht man die Sehne HJ senkrecht auf DE, somit auch perpendikulár auf den mit DE parallelen Diameter AB, so ist, weil KL dem Mittelpunkte des Kreises näher liegt, die Sehne KL > HJ (§. 67.), und also KG > HF, und GL > FJ (§. 56.), und daraus folgt, daß KN > HM, und LN > JM; weil aus den angeführten Gründen auch NG = MF, und KG — NG > HF — MF, wie auch NG + GL > MF + FJ, weßhalb KN > HM, und LN > JM.

§. 70.

III. Aufgabe, einen Kreisbogen in zwei gleiche Theile zu theilen.

I. Auflösung:

Soll man (Fig. 59.) den Bogen AEB halbiren, so ziehe man die Radien CA und CB, und halbire den Zentriwinkel ACB (§. 26.) durch den Radius CE, so theilet dieser auch den Bogen AEB in zwei gleiche Theile (§. 60. Zus. 1.).

II. Auflösung:

Man ziehe (Fig. 59.) zum Bogen AEB die Sehne AB, und halbire diese in der nämlichen Ebene durch

das Perpendikel EC (§. 27. Zus. I.), so theilet es den Bogen AEB in zwei gleiche Theile (§. 60. Zus. V.).

Anmerkung: Weil der Mittelpunkt des Kreises von den beiden Endspunkten der Sehne des Bogens gleich weit entfernt ist (§. 14. c. und e.), so beschreibt man nur mehr mit zwei gleichen Radien, von welchen jeder größer ist, als die halbe Sehne (§. 17. Zus. II.), auf der Seite des Kreisbogens zwei Bögen, die sich schneiden, und zieht von ihrem Durchschnittspunkte zum Zentrum eine gerade Linie, welche dann den gegebenen Kreisbogen halbirt.

§. 71.

XI. Lehrsatz:

Der Zentriwinkel ist doppelt so groß, als sein Peripheriewinkel.

Beweis:

Der Mittelpunkt des Kreises kann in Absicht auf den Peripheriewinkel eine dreifache Lage haben; er kann nämlich in einem Schenkel, oder zwischen beiden Schenkeln, oder außer den Schenkeln des Peripheriewinkels liegen.

1) Liegt das Zentrum in einem Schenkel des Peripheriewinkels, wie es (Fig. 62.) beim Winkel abf der Fall ist, so ist der äußere Winkel acf, da das Dreieck acb gleichschenklicht ist, doppelt so groß, als der innere entgegengesetzte Winkel abc oder abf (§. 43. Zus. VII.).

Der äußere Winkel acf ist aber der Zentriwinkel, und abf sein Peripheriewinkel, da die Schenkel beider Winkel auf dem nämlichen Bogen af aufstehen; daher ist im ersten Falle der Zentriwinkel doppelt so groß, als sein Peripheriewinkel, d. h., acf = 2abf.

2) Liegt (Fig. 66.) das Zentrum C innerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels BAD, so ziehe man vom Scheitel A aus den Durchmesser AE (§. 15. Anm. 2.), man erhält dadurch zwei Peripheriewinkel BAE und EAD, bei welchen allemal das Zentrum in einem Schenkel liegt, daher ist nach No. 1.

$$\begin{array}{l} BCE = 2BAE, \\ \text{und } ECD = 2EAD, \end{array}$$

also $BCE + ECD = 2BAE + 2EAD$ (Arithm. I. §. 25. I.), folglich $BCD = 2BAD$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 2.); das heißt, der Zentriwinkel BCD ist doppelt so groß als sein Peripheriewinkel BAD.

3) Liegt endlich das Zentrum außer den beiden Schenkeln, wie es (Fig. 66.) beim Winkel FAB der Fall ist, so ziehe man wieder vom Scheitel A den Durchmesser AE, es ist jetzt

$$\left.\begin{array}{l} FCE = 2FAE, \\ \text{und } BCE = 2BAE, \end{array}\right\} \text{nach Nro. 1.}$$

also $FCE - BCE = 2FAE - 2BAE$ (Arithm. I. §. 34. I.), folglich $FCB = 2FAB$.

Daher ist jeder Zentriwinkel doppelt so groß, als sein Peripheriewinkel, oder, was eines ist, jeder Peripheriewinkel ist die Hälfte seines Zentriwinkels.

I. Zusatz: Der Peripheriewinkel hat die Hälfte jenes Kreisbogens zum Maaße, auf welchem seine Schenkel als Sehnen des Kreises aufstehen. Hat man (Fig. 66.) den Peripheriewinkel BAE, so ist BCE sein Zentriwinkel; nun ist BCE = arc. BE (§. 63. Zus. II.), und nach dem Lehrsatze ist $BAE = \frac{1}{2}BCE$, daher ist $BAE = \frac{1}{2}$ arc. BE.

II. Zusatz: Peripheriewinkel, derer Schenkel auf dem nämlichen Kreisbogen aufstehen, sind einander gleich; weil sie dann das nämliche Maaß haben (Zus. I.).

III. Zusatz: Ein Peripheriewinkel, dessen Schenkel auf einem Durchmesser des Kreises aufstehen, ist ein rechter Winkel.

Ist (Fig. 67.) der Peripheriewinkel BAC gegeben, und stehen seine Schenkel AB und AC auf den Endspunkten des Diameters BC auf, so beträgt das Maaß dieses Winkels den halben Bogen BDC (Zus. I.); nun halbirt aber der Durchmesser BC die Kreislinie (§. 14. Zus. IV.), und der Bogen BDC ist ein Halbkreis, oder hält 180 Grad, somit ist seine Hälfte ein Quadrant, und der Peripheriewinkel BAC hält 90 Grad, ist also ein rechter Winkel (§. 11. Zus. 4.).

IV. Zusatz: Der Peripheriewinkel, dessen Bogen größer ist, als ein Halbkreis, ist stumpf, und der Peripheriewinkel, dessen Bogen kleiner ist, als ein Halbkreis, ist spitzig.

Ist (Fig. 68.) der Bogen ADC des Peripheriewinkels ABC größer als ein Halbkreis, so ist seine Hälfte größer als 90 Grad, und der Winkel ABC, welcher $= \frac{1}{2}$ arc. ADC (Zus. I.), ist stumpf; ist aber der Bogen ABC des Peripheriewinkels ADC kleiner als ein Halbkreis, so ist seine Hälfte kleiner als 90 Grad, und der Winkel ADC, welcher $= \frac{1}{2}$ arc. ABC, ist spitzig (§. 11. Zus. II.).

V. Zusatz: Geht die Kreislinie durch die vier Ecke eines Viereckes, so ist in diesem jedes Paar opponirter Winkel zwei rechten Winkeln gleich, oder = 180 Grad.

Geht (Fig. 68.) die Kreislinie durch die vier Ecke des Viereckes AC, so ist nach dem I. Zusatze

$$ABC = \tfrac{1}{2} \text{ arc. } ADC,$$
$$\text{und } ADC = \tfrac{1}{2} \text{ arc. } ABC,$$

$$\text{also } ABC + ADC = \tfrac{1}{2} \text{ arc. } ADC + \tfrac{1}{2} \text{ arc. } ABC$$
$$= \tfrac{1}{2} (\text{arc. } ADC + \text{arc. } ABC)$$
$$= \tfrac{1}{2} \text{ periph.} = 180 \text{ Grad (§. 62. Zus. I.).}$$

$$\text{Eben so ist } BAD = \tfrac{1}{2} \text{ arc. } BCD,$$
$$\text{und } BCD = \tfrac{1}{2} \text{ arc. } BAD,$$

$$\text{also } BAD + BCD = \tfrac{1}{2} \text{ arc. } BCD + \tfrac{1}{2} \text{ arc. } BAD$$
$$= \tfrac{1}{2}(\text{arc.} BCD + \text{arc.} BAD) = \tfrac{1}{2} \text{periph.} = 180^\circ.$$

Es haben also in einem solchen Vierecke die opponirten Winkel zusammen allemal 180 Grad, oder sind zwei rechten Winkeln gleich.

§. 72.

Tangens und Sekans des Kreises,

a) Eine gerade Linie, welche mit der Kreislinie nur einen Punkt gemein hat, und sonst in der nämlichen Ebene ganz außer dem Kreise liegt, heißt eine Tangens.

b) Eine gerade Linie, von welcher in einer Ebene ein Theil innerhalb, und ein Theil außerhalb des Kreises liegt, heißt eine Sekans.

Daher ist (Fig. 69.) die Linie DB eine Tangens, weil sie mit der Kreislinie in einer Ebene nur einen Punkt gemein hat, und sonst ganz außer dem Kreise liegt, und HE ist eine Sekans, da in einer Ebene der Theil AH außerhalb, und der Theil AE innerhalb des Kreises liegt.

§. 73.

XII. Lehrsatz:

Eine gerade Linie, welche in einer Ebene auf dem Radius oder Durchmesser am Endspunkte perpendikulär steht, ist eine Tangens des Kreises.

Beweis:

1) Steht (Fig. 69.) die gerade Linie am Endspunkte A auf dem Radius AC oder auf dem Durchmesser AQ senkrecht, so hat in dieser Voraussetzung DB mit der Peripherie des Kreises den Punkt A gemein;

2) Nimmt man in dieser Linie den beliebigen Punkt G an, und zieht man vom Zentrum C die gerade Linie CG, so ist wegen des rechten Winkels bei A die Linie CG größer, als der Radius CA (§. 30. Zus. IV.), und deßhalb liegt jeder andere Punkt der Linie BD außer dem Kreise; die Linie DB ist daher ein Tangens des Kreises (§. 72. a.).

§. 74.

XIII. Lehrsatz:

Eine gerade Linie, die mit dem Radius am Endspunkte einen schiefen Winkel bildet, ist eine Sekans des Kreises.

Beweis:

1) Steht (Fig. 69.) die gerade Linie HE am Endspunkte A auf dem Radius AC, oder auf dem Durchmesser AQ schief auf (§. 8. b.), und man zieht aus C auf HE das Perpendikel CF, so kann es mit CA nicht zusammen fallen (§. 8. c. und d.), und man erhält

wegen des rechten Winkels bei F das rechtwinklichte Dreieck AFC, wo der Radius AC > CF (§. 30. Zus. IV.), weßhalb der Punkt F der Linie HE innerhalb des Kreises liegt;

2) Nimmt man unter dem Punkte A in der Linie HE den Punkt H an, und zieht man die gerade Linie HC, so ist im rechtwinklichten Dreiecke AFC der Winkel m spitzig (§. 29. Zus.), somit sein Nebenwinkel HAC oder n stumpf (§. 9. Zus. V.), und im stumpfwinklichten Dreiecke HAC ist HC > AC (§. 30. Zus. IV.), daher liegt der Punkt H der Linie HE außer dem Kreise, und diese Linie ist eine Sekans (§. 72. b.).

I. Zusatz: Die Tangens steht am Berührungspunkte auf den Radius senkrecht; weil sie sonst, im Falle sie mit dem Radius schiefe Winkel bilden würde, nach dem aufgestellten Lehrsatze eine Sekans wäre.

II. Zusatz: Für jeden Punkt der Peripherie gibt es nur eine Tangens; indem es durch jeden Punkt der Peripherie auf den Radius nur ein Perpendikel gibt (§. 32. Zus. II.).

III. Zusatz: Wenn man auf die Tangens am Berührungspunkte in der nämlichen Ebene ein Perpendikel zieht, so geht es durch den Mittelpunkt des Kreises.

Denn (Fig. 69.) ginge das Perpendikel AE nicht durch das Zentrum, so könnte man vom Berührungspunkte A den Radius AC ziehen, welcher auch auf die Tangens DB senkrecht wäre (Zus. I.); auf DB kann es aber in einer Ebene nur ein einziges Perpendikel vom Punkte A aus geben (§. 32. Zus. II.), daher muß das Perpendikel AE durch das Zentrum des Kreises gehen.

IV. Zusatz: Zwischen der Tangens und der Peripherie des Kreises läßt sich durch den Berührungspunkt in der nämlichen Ebene keine andere gerade Linie mehr ziehen. Denn (Fig. 69.) jede andere gerade Linie durch A, die nicht mit der Tangens zusammen fällt, steht auf dem Radius schief, und liegt also als eine Sekans zum Theile innerhalb des Kreises (Lehrs.).

V. Zusatz: Der Winkel zweier Sekanten außerhalb des Kreises ist der halben Differenz der Bögen gleich, welche die Sekanten abschneiden.

Stoßen (Fig. 70.) die beiden Sekanten AB und CB außer dem Kreise in B zusammen, und zieht man die Linie AE, so ist der äußere Dreieckswinkel m = A + B (§. 43. Zus. VI.), somit B = m — *A* (Arithm. III. §. 96. Zus. I.), und also, weil m und *A* Peripheriewinkel sind (§. 59. b.), der Winkel B = ½ arc. *A*C — ½ arc. DE (§. 71. Zus. I.), das ist, der Winkel B ist = ½(*A*C — DE), wenn man nämlich die ganze Differenz halbirt, anstatt jeden Bogen mit 2 zu dividiren (Arithm. III. §. 53. Lehrs. III.).

§. 75.

IV. Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt der Peripherie eine Tangens des Kreises zu ziehen.

Auflösung:

Soll (Fig. 69.) durch den Punkt *A* der Peripherie eine Tangens des Kreises gezogen werden, so ziehe man von *A* den Radius *A*C, und ziehe durch diesen Punkt die Linie DB auf *A*C senkrecht (§. 45.), so ist DB die verlangte Tangens des Kreises (§. 73.).

§. 76.

XIV. Lehrsatz:

Zieht man im Kreise vom Berührungspunkte der Tangens eine Sehne, welche kein Durchmesser des Kreises ist, so ist der spitzige Winkel, welchen die Tangens mit der Sehne macht, dem Peripheriewinkel gleich, welcher auf dem kleineren Bogen der Sehne aufsteht, und der stumpfe Winkel, den die Sehne mit der Tangens bildet, ist dem Peripheriewinkel gleich, welcher auf dem größeren Bogen der Sehne steht.

Beweis:

1) Ist (Fig. 71.) die Linie ED eine Tangens des Kreises, und *A* der Berührungspunkt, und werden zur Linie *A*B nebst dem Durchmesser *A*G die Sehnen GB,

BF und FA gezogen, so ist ABG ein rechter Winkel (§. 71. Zus. III.), und deßhalb GAB + AGB = 90 Grad (§. 43. Zus. V);

2) Die Tangens macht mit dem Radius oder dem Durchmesser des Kreises allemal einen rechten Winkel (§. 74. Zus. I.), daher ist GAD, oder GAB + BAD = 90 Grad, und also BAD = AGB; es ist nämlich nach Nro. 1.

GAB + AGB = 90°, und nach Nro. 2.
GAB + BAD = 90°, also (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.),

GAB + BAD = GAB + AGB,
dann GAB = GAB (Arithm. I. §. 10. Nro. 1.),

folglich BAD = AGB.

Es ist also der spitzige Winkel BAD, den die Sehne mit der Tangens macht, dem Peripheriewinkel AGB gleich, dessen Schenkel auf dem kleineren Bogen der Sehne aufstehen.

3) Die Winkel EAB und BAD sind Nebenwinkel (§. 8. a.), und beim Vierecke GF geht die Kreislinie weil alle Seiten Sehnen des Kreises sind (Nro. 1.), durch alle vier Ecke; deßhalb ist

EAB + BAD = 180 Grad (§. 11. Zus. III.),
und AFB + AGB = 180 Grad (§. 71. Zus. V.),

also EAB + BAD = AFB + AGB,
dann nach Nro. 2. ist BAD = AGB,

mithin EAB = AFB.

Es ist also der stumpfe Winkel EAB, den die Sehne mit der Tangens macht, gleich dem Peripheriewinkel AFB, dessen Schenkel auf dem größeren Bogen der Sehne aufstehen.

Zusatz: Die Winkel, welche die Tangens auf beiden Seiten mit der Sehne macht, sind den halben Bögen gleich, die zwischen ihnen liegen. Denn (Fig. 71.) nach dem Lehrsatze ist

BAD = AGB = ½ arc. AFB }
und EAB = AFB = ½ arc. AGB } (§. 71. Zus. I.).

Anmerkung: Zieht man vom Berührungspunkte eine Sehne durch das Zentrum, welche ein Diameter des Kreises ist, so steht die Tangens auf dem Durchmesser

senkrecht (§. 74. Zus. I.), und die beiden Winkel, welche die Tangens mit dem Durchmesser bildet, sind rechte Winkel, gleichwie es auch die Peripheriewinkel sind, die beiderseits auf dem Diameter aufstehen (§. 71. Zus. III.).

§. 77.

XV. Lehrsatz:

Zwei Tangenten, die auf den Endspunkten des Durchmessers stehen, sind parallel; stehen aber zwei Tangenten auf einer Sehne, die nicht ein Durchmesser ist, so stoßen sie auf der Seite des kleineren Bogens der Sehne zusammen.

Beweis:

1) Stehen (Fig. 69.) die Tangenten *A*D und QM auf dem Diameter *A*Q senkrecht, so ist DAQ = 90° und AQM = 90° (§. 11. Zus. *I.*), also DAQ + AQM = 180 Grad, und *A*D ist, weil die Tangenten mit dem Kreise in einer Ebene sind, parallel mit QM.

2) Stehen aber (Fig. 72.) die Tangenten *A*L und *A*M auf der Sehne HK, das ist, gehen sie durch die Endspunkte der Sehne, welche kein Durchmesser ist (§. 14. f.), so liegt C außerhalb HK; zieht man nun die Radien HC und KC, so ist AHC = AKC = 90° (§. 74. Zus. *I.*), und AHC + AKC = 180°, folglich, weil AHK und AKH nur Theile von AHC und AKC sind, AHK + AKH < 180 Grad (Arithm. *I.* §. 10. Nro. 3.); daher stoßen die Linien H*A* und K*A* auf der Seite des kleineren Bogens HBK zusammen (§. 40.).

§. 78.

V. Aufgabe, von einem außer dem Kreise gegebenen Punkte in einer Ebene zwei Tangenten zu ziehen.

Auflösung:

1) Man ziehe (Fig. 72.) von dem außer dem Kreise in der nämlichen Ebene gegebenen Punkte A zum Zen-

trum des Kreises die Sekans *A*C, und durch den Durchschnittspunkt B die Tangens DE (§. 75.);

2) Mit der Linie C*A* als Radius beschreibe man von C aus eine Kreislinie, welche das Perpendikel DE in zwei Punkten D und E schneiden wird (§. 16.), oder bestimme sich vielmehr nur mit dem Halbmesser C*A* diese Durchschnittspunkte, und ziehe die geraden Linien CD und CE;

3) Von A aus ziehe man zu den Durchschnittspunkten H und K die geraden Linien *A*H und *A*K, so sind sie die beiden verlangten Tangenten, welche auf verschiedenen Seiten von *A*C liegen.

Beweis:

1) Weil man nach Nro. 2. mit dem Halbmesser C*A* die Punkte D und E bestimmte, so ist

CD = CA,
dann CH = CB (§. 14. Zus. IV.),
und HCA = BCD,

also △ DCB ≅ △ AHC (§. 20.),
folglich AHC = DBC = 90 Grad (Nro. 1.).

Es ist also *A*H am Endspunkte H auf den Radius HC senkrecht, und deßhalb eine Tangens des Kreises.

2) Aus den nämlichen Gründen ist auf der anderen Seite

AC = CE,
dann CB = CK,
und BCE = KCA,

also △ ACK ≅ △ BCE,
folglich AKC = CBE = 90°.

Daher ist *A*K ebenfalls eine Tangens des Kreises.

I. Zusatz: Die aus einem Punkte in einer Ebene zu beiden Seiten gezogenen Tangenten sind einander gleich. Denn (Fig. 72.)

CH

$CH = CK$ (§. 14. Zus. IV.),
$CA = CA$,
und $CHA = CKA$ (§. 74. Zus. *I.*),
also $\triangle CAH \cong \triangle CKA$ (§. 34. Zus. II.),
folglich $AH = AK$.

II. Zusatz: Ist (Fig. 72.) die Linie AK der Tangens AH gleich, so ist AK ebenfalls eine Tangens; weil dann $CH = CK$, und $CA = CA$, also $\triangle CHA \cong \triangle CKA$ (§. 34.), somit $CKA = CHA = 90$ Grad (§. 74. Zus. *I.*).

III. Zusatz: Von einem aus einem Kreise gegebenen Punkte lassen sich in einer Ebene nur zwei Tangenten des Kreises ziehen. Denn (Fig. 72.) hat man von A die beiden Tangenten AH und AK gezogen, und man wollte von diesem Punkte aus noch eine dritte Tangens des Kreises beschreiben, welche am Berührungspunkte auf den Radius senkrecht stehen müßte (§. 74. Zus. *I.*), so würde sie allemal ein rechtwinklichtes Dreieck bilden, welches AC zur Hypotenuse, und den Radius zum Perpendikel hat, das somit mit dem Dreiecke AHC, oder mit AKC kongruent (§. 34. Zus. II.), weßhalb diese dritte Tangens mit AH, oder mit AK zusammen fallen würde, und also von diesen nicht verschieden wäre.

Anmerkung: Im vorstehenden I. Zusatze versteht man unter den Tangenten die Theile derselben, welche zwischen A und den Berührungspunkten H und K liegen.

III. Hauptstück.

Von Verhältnissen gerader Linien.

I. Abschnitt.

Von Verhältnissen gerader Linien in geradlinigten ebenen Figuren.

§. 79.

Das Maaß gerader Linien.

a) Wird eine gerade Linie von bekannter Länge angenommen, um ihr Verhältniß zu anderen geraden Linien, und dadurch die Größe der letzteren zu bestimmen, so nennt man dieselbe das Maaß gerader Linien, oder ein Längenmaaß;

b) Eine gerade Linie messen, heißt ihr Verhältniß zum Längenmaaße angeben, somit bestimmen, wie oft das Längenmaaß, oder ein gewisser Theil davon gesetzt werden muß, um die gerade Linie zu erhalten, welche gemessen wird (Arithm. I. §. 2. e.).

I. Zusatz: Da in Baiern die eingeführten üblichen Längenmaaße Ruthen, Schuhe, Zolle, Linien rc. genannt werden (Arithm. I. §. 79.), so wird eine gerade Linie gemessen, wenn man ihre Länge in Ruthen, Schuhen, Zollen rc. angibt, d. h., wenn man bestimmt, wie viele Ruthen, Schuhe, Zolle rc. eine gerade Linie hat.

II. Zusatz: Zwei Linien stehen nur in so ferne in einem geometrischen Verhältnisse (Arithm. IV. §. 33. Nro. 1.), in so ferne sie gezählte Größen sind, das ist, in wie ferne ihre Größe durch ein gemeinschaftliches Maaß in Zahlen ausgedrückt ist (Arithm. I. §. 6. a.).

III. Zusatz: Was von Verhältnissen und Proportionen in der Arithmetik allgemein gesagt wird, gilt demnach auch in Absicht auf die Verhältnisse und Proportionen der Linien.

Anmerkung: 1) Wenn AB, BC und AC Linien bezeichnen, so zeigen die Ausdrücke AB $\times$ BC, dann $\frac{AB \,.\, BC}{AC}$, ferner AB^2, und $\sqrt{AB}$ in der Folge Produkte, Quotienten, Quadrate und Quadratwurzeln nicht von Linien, sondern von Zahlen an, die man erhält, wenn man diese Linien durch ein gemeinschaftliches Maaß mißt.

2) Das zehentheilige Maaß ist wegen seiner großen Bequemlichkeit beim Rechnen in unserem Dezimalsysteme (Arithm. I. §. 15.) von den Geometern angenommen worden.

3) Im I. Theile meines Lehrbuches der Arithmetik im §. 79. findet man in Betreff der Längenmaaße die benöthigten Begriffe nebst einer genauen Hinweisung auf die gesetzlichen Bestimmungen des königl. baierischen Regierungsblattes, und zwei Tabellen, welche die Eintheilung des Fußes oder Schuhes im Duodezimal- und im Dezimalmaaße darstellen.

4) In meinem Lehrbuche der Arithmetik sind in der dritten Auflage des ersten Theiles auch die königl. würtemberg. und die großherzogl. badischen Längenmaaße, und in der dritten Auflage des zweiten Theiles sind die in einigen Kantonen der Schweiz üblichen Längenmaaße enthalten, während in dem dritten Theile die französischen Längenmaaße vorkommen.

§. 80.

I. Lehrsatz:

Wenn man auf einem Schenkel eines hohlen Winkels eine beliebige Anzahl gleicher Theile aufträgt, und durch die Theilungspunkte Parallellinien zieht, so werden auch auf dem anderen Schenkel durch die Parallelen eben so viele, unter sich gleiche Theile bestimmt.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 73.) der hohle Winkel BAC gegeben, und auf dem Schenkel AB seien die gleichen Theile Aa, ab, bc und cd aufgetragen;

2) Man ziehe (§. 39.) durch die Punkte a, b, c und d die Parallellinien af, bg, ch und di, und

durch die neuen Durchschnittspunkte f, g und h die geraden Linien fk, gm und hn parallel mit AB;

3) Es ist nach der Voraussetzung Aa = ab = bc = cd, ferner ab = fk, dann bc = gm, und cd = hn (§. 41. Zus. IV.), mithin Aa = fk = gm = hn (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.);

4) Die Winkel Aaf, abg, bch und cdi sind einander gleich, ferner ist abg = fkg, dann bch = gmh, und cdi = hni (§. 41.), also ist Aaf = fkg = gmh = hni;

5) Endlich ist, da die Linien af, bg, ch und di parallel sind der Winkel Afa = fgk = ghm = hin.

Daher sind die Dreiecke Aaf, fkg, gmh und hni zu einander kongruent (§. 44.), und Af = fg = gh = hi (§. 18. Zus. IV.); d. h., wenn man auf dem Schenkel AB mehrere gleiche Theile aufträgt, und durch die Theilungspunkte Parallelen zieht, so schneiden diese auf dem anderen Schenkel AC eben so viele gleiche Theile ab.

I. Zusatz: Wenn (Fig. 73.) dem Theile Aa des einen Schenkels in voriger Konstruktion der Theil Af des anderen Schenkels entspricht, so gehört zum Theile Ab = 2Aa der Theil Ag = 2Af, dann zum Theile Ac = 3Aa der Theil Ah = 3Af, und überhaupt, wenn n eine ganze Zahl bezeichnet, zum Theile n . Aa der Theil n . Af, das ist, jedes Vielfache von Aa gibt auf dem anderen Schenkel das Gleichvielfache von Af.

II. Zusatz: Die Theile des einen Schenkels stehen mit den korrespondirenden Theilen des anderen Schenkels, welche durch die auf die angezeigte Weise gezogenen Parallelen bestimmt werden, im geraden Verhältnisse; da dem zwei-, drei-, und überhaupt nmal größeren Theile des einen Schenkels ein zwei-, drei-, und überhaupt nmal größerer Theil des anderen Schenkels entspricht (Arithm. II. §. 58. a.).

III. Zusatz: Weil (Fig. 73.) die Parallele af = bk, dann bg = cm, und ch = dn (§. 41. Zus. IV.), und wegen der im Beweise des Lehrsatzes gezeigten Kongruenz der Dreiecke die Linie af = kg = mh = ni (§. 18. Zus. IV.), so ist die Parallele bg = 2af,

dann ch = 3af, und überhaupt, wenn man die Schenkel in n gleiche Theile theilet, di = n . af.

IV. Zusatz: Wenn dem Theile Aa die Parallele af entspricht, so gehört zum Theile Ab = 2Aa die Parallele bg = 2af, dann zu Ac = 3Aa die Parallele ch = 3af, und überhaupt zu n . Aa gehört n . af, woraus folgt, daß diese Theile mit den korrespondirenden Parallelen im geraden Verhältnisse stehen (Arithm. II. §. 58. a.).

§. 81.

II. Lehrsatz:

Wenn man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallellinie zieht, so sind die abgeschnittenen Stücke der zwei übrigen Seiten unter sich, und mit den ganzen Seiten gerade proportionirt.

Beweis:

1) Würde man (Fig. 74.) im Dreiecke BAC die Seite AB in gleiche Theile theilen, und durch die Theilungspunkte mit BC Parallelen ziehen, so würde auch die Seite AC in eben so viele, unter sich gleiche Theile getheilt werden (§. 80.), und die linksstehenden Theile wären mit den korrespondirenden rechtsstehenden im geraden Verhältnisse (§. 80. Zus. II.);

2) Stehen zwei Größen im geraden Verhältnisse, so sind jede zwei beliebige Theile der ersten Größe mit den korrespondirenden Theilen der anderen Größe, somit jede zwei Theile von AB mit den entsprechenden Theilen von AC gerade proportionirt (§. 61. Zus. II. und Anmerk.); daher erhält man die geometrische Proportion:

$$AD : DB = AE : EC;$$

3) Wenn man in dieser Proportion die Glieder eines jeden Verhältnisses addirt (Arithm. IV. §. 39. Zus. I.), so verhält sich:

$$AD + DB : AE + EC = AD : AE,$$
und $AD + DB : AE + EC = DB : EC,$
also $AB : AC = AD : AE,$
und $AB : AC = DB : EC;$

4) Wenn man endlich das zweite Verhältniß an die Stelle des ersten schreibt, und die mittleren Glieder verwechselt (Arithm. IV. §. 38.), so erhält man die Proportionen:

$AD : AB = AE : AC$
und $DB : AB = EC : AC.$

Anmerkung: Wenn von nun an gesagt wird: »die Linien sind zu einander proportionirt, oder die einen Linien verhalten sich zu einander, wie die anderen«, so versteht sich's jedesmal, daß sie zu einander gerade proportionirt sind (Arithm. II. §. 59.). Sind die Linien umgekehrt zu einander proportionirt (Arithm. II. §. 60.), so wird es allemal ausdrücklich bemerkt werden.

§. 82.

III. Lehrsatz:

Wenn man im Dreiecke zu einer Seite eine Parallele zieht, so verhält sich jedes abgeschnittene Stück der zwei übrigen Seiten zur ganzen Seite, wie die gezogene Parallele zur dritten Seite.

Beweis:

1) Man ziehe (Fig 74.) von einem beliebigen Punkte der Seite AB die Linien DE mit BC, und vom Punkte E die Linie EG mit AB parallel; man erhält nach dem im § 81. aufgestellten Lehrsatze die Proportion:

$$AE : AC = BG : BC;$$

2) Weil nach Nro. 1. die Linie DE mit BG, und EG mit DB parallel ist, so ist $BG = DE$ (§. 41. Zus. IV.); daher

$AE : AC = DE : BC,$
ferner $AE : AC = AD : AB$ (§ 81.),
also auch $AD : AB = DE : BC$ (Arithm. IV. §. 43.).

§. 83.

IV. Lehrsatz:

Wenn in einem Dreiecke eine Linie zwei Seiten in proportionirte Theile theilet, so ist sie zur dritten Seite parallel.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 74.) im Dreiecke BAC die Linie DE so gezogen, daß AD : AB = AE : AC, oder AD : DB = AE : EC.

2) Wäre im ersten Falle DE mit BC nicht parallel, so könnte man von D aus eine andere Parallele mit BC, etwa DF ziehen, und dann würde sich AD : AB = AF : AC verhalten (§. 81.);

3) Weil nach der ersten Annahme AD : AB = AE : AC, so wäre AE : AC = AF : AC (Arithm. IV. §. 43.), und AE = AF, indem AC = AC (Arithm. IV. §. 35. Zus. III.);

4) Ist aber AE = AF, so fällt die Parallele DF, da sie mit DE die zwei Punkte D und E gemein hat, mit DE zusammen (§. 3. Zus. III.), und DE ist mit BC parallel;

5) Ist in der zweiten Voraussetzung
AD : DB = AE : EC,
so ist AD + DB : AE + EC = AD : AE (Arithm. IV. §. 39. Zus. I.),
das ist, AB : AC = AD : AE,
oder AD : AB = AE : AC.

Daher ist wieder DE mit BC parallel; d. h., DE # BC, wenn AD : AB = AE : AC, oder wenn AD : DB = AE : EC.

§. 84.

V. Lehrsatz:

Wenn in einem Dreiecke eine gerade Linie einen Winkel halbirt, so sind die zwei Stücke der entgegenstehenden Seite mit den übrigen zwei Seiten proportionirt.

Beweis:

1) Man verlängere (Fig. 75.) eine Seite AC, welche dem Winkel ACB anliegt, den man durch CD hal-

birt hat; ferner mache man die Verlängerung CE der anderen Seite CB gleich, und ziehe von B nach E die gerade Linie BE;

2) Weil CE = CB, so ist das Dreieck BCE gleichschenklicht (§. 18. b.), und dessen äußerer Winkel an der Spitze ACB, oder m + n ist = 2p = 2q (§. 43. Zus. VII.);

3) Nach der Voraussetzung hat man den Winkel ACB halbirt, weßhalb m = n, und m + n = 2m = 2n, folglich 2m = 2q, und 2n = 2p, und deßhalb m = q, und n = p; ist aber m = q, oder n = p, so ist DC # BE (§. 38.);

4) Weil endlich DC mit BE parallel ist, so verhält sich AD : DB = AC : CE (§. 81.), und also auch, indem CE nach Nro. 1. der Linie CB gleich gemacht wurde, AD : DB = AC : CB.

§. 85.

VI. Lehrsatz:

Wenn in einem Dreiecke eine gerade Linie eine Seite den übrigen proportionirt schneidet, so theilet sie den opponirten Winkel in zwei gleiche Theile.

Beweis:

1) Man nehme wieder (Fig. 75.) auf der verlängerten Seite AC die Linie CE = CB, und ziehe BE;

2) Nach der Voraussetzung ist
AD : DB = AC : CB,
also auch AD : DB = AC : CE,
und deßhalb DC # BE (§. 83.);

3) Weil DC mit BE parallel ist, so ist m = q, und n = p (§. 41.), und, da p = q (§. 21. Zus. I.), der Winkel m = n; d. h., die gerade Linie DC, welche die Seite AB in die Theile AD und DB theilet, welche mit AC und CB proportionirt sind, theilet den opponirten Winkel ACB in zwei gleiche Theile.

§. 86.

I. Aufgabe, eine gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

I. Auflösung:

1) Man verzeichne (Fig. 73.) zur gegebenen Linie AC, welche man in gleiche Theile theilen will, einen beliebigen hohlen Winkel BAC, und trage auf dem Schenkel AB die beliebige Länge Aa so vielmal auf, als Theile verlangt werden, etwa viermal, mithin die Theile Aa, ab, bc und cd;

2) Vom letzten Theilungspunkte d ziehe man zum Endspunkte C der auf dem anderen Schenkel des Winkels aufgetragenen Linie AC die gerade Linie dC, und durch die Punkte a, b und c mit dC die Parallelen af, bg und ch (§. 39.);

3) Auf diese Weise hat man auf dem Schenkel AB vier gleiche Theile aufgetragen, und durch die Theilungspunkte Parallelen gezogen, weßhalb die Linie AC in vier gleiche Theile getheilt wurde (§. 80.).

II. Auflösung:

Man messe die gegebene Linie, und dividire die Zahl, welche ihre Länge angibt, durch die verlangte Anzahl der Theile; es gibt der Quotient die Größe eines Theiles im gebrauchten Maaße, den man dann auf der gegebenen Linie so vielmal aufträgt, als es die Anzahl der Theile erfordert.

Anmerkung: 1) Wie gerade Linien mittels der Skala oder des verjüngten Maaßstabes auf dem Papier, und durch Meßketten oder Stäbe auf dem Felde gemessen und aufgetragen werden, wird in der praktischen Geometrie gezeigt werden.

2) Der Anfänger kann einsweilen die Größe der gegebenen Linien in beliebigen Zahlen ausdrücken, und darnach die vorkommenden Aufgaben auflösen, indem er dann die Resultate auch in bestimmten Zahlen angibt.

§. 87.

II. **Aufgabe**, eine gegebene gerade Linie in mehrere Theile zu theilen, die ein bestimmtes Verhältniß haben.

I. Auflösung:

1) Man verzeichne (Fig. 76.) einen beliebigen hohlen Winkel BAC, und trage auf dem einen Schenkel AB die gegebenen Linien AD, DE und EB, welche das Verhältniß angeben, der Ordnung nach auf;

2) Auf dem anderen Schenkel trage man die gegebene Linie AC auf, und ziehe die Linie BC, und mit dieser durch die Punkte D und E mit BC die Parallelen Dd und Ee, so verhält sich

$$Ad : de = AD : DE,$$

dann $Ad : eC = AD : EB,$

und $de : eC = DE : EB.$

Beweis:

1) Im Dreiecke AEe ist Dd parallel mit Ee gezogen, daher verhält sich (§. 81.)

$$Ad : de = AD : DE;$$

2) Aus dem nämlichen Grunde ist

$$Ad : Ae = AD : AE,$$

und $Ae : eC = AE : EB,$

also $Ad : eC = AD : EB$ (Arithm. IV. §. 43.);

3) Endlich verhält sich

$$Ad : de = AD : DE,$$

und $Ad : eC = AD : EB,$

mithin $de : eC = DE : EB$ (Arithm. IV. §. 43.).

II. Auflösung:

Man messe die gegebene Linie AC, und die das Verhältniß bestimmenden Linien AD, DE und EB mit einerlei Maaß, bestimme die Theile nach der im IV. Theile der Arithmetik §. 40. aufgestellten Regel, und trage die gefundenen Theile auf AC auf.

§. 88.

III. Aufgabe, zu drei gegebenen Linien die vierte geometrische Proportionallinie zu finden.

I. Auflösung:

1) Man verzeichne (Fig. 77.) einen beliebigen hohlen Winkel BAC, trage auf dem einen Schenkel AB die gegebenen Linien AD und DE, und auf dem anderen Schenkel AC die dritte gegebene Linie Ad auf, und ziehe die gerade Linie Dd;

2) Durch E ziehe man zu Dd die Parallele Ee, so ist de die verlangte vierte geometrische Proportionallinie zu den drei gegebenen Linien AD, DE und Ad; weil nach dem im §. 81 aufgestellten Lehrsatze sich verhält

$$AD : DE = Ad : de.$$

II. Auflösung:

Man messe die drei gegebenen Linien durch einerlei Maaß, suche zu den gefundenen Zahlen, welche die Größe dieser Linien angeben, die vierte geometrische Proportionalzahl (Arithm. IV. §. 36.), und trage die gefundene Linie auf.

§. 89.

IV. Aufgabe, zu zwei gegebenen Linien die dritte geometrische Proportionallinie zu finden.

I. Auflösung:

1) Man verzeichne (Fig. 77.) einen beliebigen hohlen Winkel BAC, und trage auf dem einen Schenkel AB die zwei gegebenen Linien AD und DE, und auf dem anderen Schenkel AC wieder die Linie DE auf, gesetzt sie reiche bis d, so daß Ad = DE;

2) Von D ziehe man zu d die gerade Linie Dd, und durch E mit Dd die Parallele Ee. Es ist jetzt de die gesuchte dritte Proportionallinie zu den zwei gegebenen Linien AD und DE; indem Ad = DE, und nach dem Lehrsatze des §. 81.

AD : DE = Ad : de,
mithin AD : DE = DE : de,
oder AD : DE : de (Arithm. IV. §. 35. Zus. I.).

II. Auflösung:

Man messe die gegebenen Linien AD und DE mit einerlei Maaß, suche zu den Zahlen, die ihre Größe ausdrücken, die dritte geometrische Proportionalzahl (Arithm. IV. §. 37.), und trage die gefundene Linie auf.

Anmerkung: Wie zu zwei gegebenen Linien die mittlere geometrische Proportionallinie zu finden ist, wird im nächsten Abschnitte bei der Lehre von Verhältnissen gerader Linien im Kreise gezeigt werden.

§. 90.

VII. Lehrsatz:

Wenn in zwei geradgebrochenen Linien von gleich viel Theilen die Winkel der Ordnung nach einander gleich, und die Theile, die sie einschließen, einander proportionirt sind, so sind sie ähnlich.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 78.) die beiden gebrochenen Linien ABCDEFG und abcdefg gegeben, bei welchen die im Lehrsatze genannten Bedingungen eintreffen;

2) Die geradgebrochene Linie ist aus verschiedenen geraden Linien zusammengesetzt (§. 3. c.), und es gehört außer der geraden Richtung ihrer Theile, die bei allen die nämliche, und außer der Menge der Theile, welche in geradgebrochenen Linien von gleich viel Theilen einerlei ist, zu ihrer Qualität die Neigung der Theile gegen einander, welche die Winkel derselben bestimmen, und das geometrische Verhältniß, in welchem jeder Theil zu dem anderen steht (Arithm. I. §. 2. d.);

3) Also sind zwei gerad gebrochene Linien von gleich viel Theilen von gleicher Qualität oder ähnlich (Arithm. I. §. 2. h.), wenn in beiden die Winkel der Ordnung nach gleich, und die homologen Theile, welche gleiche Winkel einschließen, zu einander proportionirt sind.

I. Zusatz: Zwei ebene geradlinigte Figuren sind ähnlich, wenn die Anzahl der Seiten in beiden einerlei ist, und sowohl die Winkel der Ordnung nach gleich, als auch jedes Paar der homologen Seiten, die gleiche Winkel einschließen, oder ihnen gegenüber stehen, zu einander proportionirt sind; indem in dieser Voraussetzung die geradgebrochenen Linien, die ihren Perimeter ausmachen (§. 12. d.), und deßhalb die ebenen geradlinigten Figuren selbst von gleicher Qualität sind, welche bei ihnen in der Anzahl, der Lage und im Verhältnisse der Seiten besteht, so daß bei der einen Figur die ebene Fläche eben so begränzt ist, wie bei der anderen; und umgekehrt, wenn zwei ebene geradlinigte Figuren ähnlich sind, und somit gleiche Qualität haben, so sind beide gleichnamig, und sowohl die Winkel der Ordnung nach gleich, als auch alle Paare homologer Seiten proportionirt.

II. Zusatz: Zwei ebene geradlinigte Figuren von gleich viel Seiten sind ähnlich, wenn in beiden die Winkel der Ordnung nach gleich, und alle homologen Seiten zu einander proportionirt sind (Zus. I.).

III. Zusatz: Wenn zwei ebene geradlinigte Figuren der nämlichen dritten ähnlich sind, so sind sie es auch unter sich; indem sie dann mit der nämlichen dritten Figur, und deßwegen auch unter sich die nämliche Qualität haben (Arithm. I. §. 10. Nro. 10.).

IV. Zusatz: Alle reguläre Figuren von gleich viel Seiten sind ähnlich.

Weil die regulären Figuren nach der Voraussetzung gleichnamig sind, das ist, gleich viel Seiten haben, so sind alle Winkel der einen Figur den Winkeln der anderen gleich, indem jeder nach dem im §. 53. aufgestellten I. Zusatze gleich $180° - \frac{360°}{n}$ ist. Ueberdieß sind in jeder einzelnen Figur alle Seiten einander gleich, und es ist sowohl in der einen, als in der anderen Figur das Verhältniß jeder zwei Seiten ein Verhältniß der Gleichheit (Arithm. II. §. 50. b.), da jede zwei Seiten der einen mit jeden zwei Seiten der anderen proportionirt, und somit die Figuren ähnlich sind (Zus. II.).

Anmerkung: Es ist bequem, wenn man zwei ähnliche geradlinigte Figuren der Ordnung nach mit den nämlichen Buchstaben, die eine mit den großen, die andere mit den kleinen, bezeichnet, so daß die nämlichen Winkel, und die homologen Seiten die nämlichen Buchstaben erhalten. Will man die auf diese Weise bezeichneten Seiten und Winkel in der Aussprache unterscheiden, so sagt man z. B. die Seite AB groß, und die Seite ab klein, dann der Winkel A groß, und der Winkel a klein etc.

§. 91.

VIII. Lehrsatz:

Wenn in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele gezogen wird, so ist das kleinere Dreieck dem größeren ähnlich.

Beweis:

1) Wird (Fig. 74.) im Dreiecke ABC die Linie DE mit BC parallel gezogen, so ist der Winkel ADE = ABC, und AED = ACB (§. 41.), und zugleich ist der Winkel A für das Dreieck DAE und für BAC ein gemeinschaftlicher Winkel, und daher A = A;

2) Weil DE mit BC parallel gezogen wurde (Nro. 1.), so sind nach den in den §§. 81 und 82. aufgestellten Lehrsätzen folgende Proportionen richtig:

AD : AB = AE : AC,
dann AD : AB = DE : BC,
und AE : AC = DE : BC.

Es sind also in diesen beiden Dreiecken alle Winkel der Ordnung nach gleich, und alle homologen Seiten, die gleiche Winkel einschließen, oder gleichen Winkeln gegenüber stehen, zu einander proportionirt, und das kleinere Dreieck ADE ist dem größeren BAC ähnlich (§. 90. Zus. II.).

Anmerkung: Man kann, um die möglichen Verhältnisse der homologen Seiten auszudrücken, entweder die Proportionen nach der Ordnung der Winkel ansetzen, und allemal zwei Seiten, die einen Winkel einschließen, im Verhältnisse mit einander vergleichen, oder die Verhältnisse nach Seiten, die gleichen Winkeln opponirt sind, bestimmen; man erhält in beiden Fällen alle möglichen

Verhältnisse der homologen oder gleichnamigen Seiten; indem sich die drei Seiten eines Dreieckes zu drei Paaren verbinden lassen (Arithm. IV. §. 94.), und deßhalb drei Verhältnisse geben. Werden nun die drei Verhältnisse der Seiten des einen Dreieckes mit den drei Verhältnissen des anderen verglichen, so erhält man drei Proportionen (Arithm. II. §. 51.), welche alle möglichen Verhältnisse der homologen Seiten darstellen.

§. 92.

IX. Lehrsatz:

Wenn in zwei Dreiecken der Ordnung nach alle Winkel gleich sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 79.) in den beiden Dreiecken ABC und abc alle Winkel der Ordnung nach einander gleich, somit A = a, dann B = b, und C = c;

2) Man nehme auf der Seite AB des Dreieckes ABC die Linie AD = ab, und ziehe DE zu BC parallel (§. 39.), es ist nach dem Lehrsatze des vorigen §. das Dreieck ADE ähnlich dem Dreiecke ABC, oder ADE ∽ ABC (Arithm. I. §. 9. Nro. 4.);

3) Weil DE zu BC parallel gezogen wurde, so ist der Winkel D = B (§. 41.), und nach der Voraussetzung B = b, also D = b; ferner der Winkel A = a, und nach Nro. 2. ist die Seite AD = ab, mithin das Dreieck ADE mit abc kongruent (§. 22.), oder △ ADE ≌ △ abc;

4) Kongruente Größen sind von einerlei Quantität und Qualität zugleich (Arithm. I. §. 2. b.), und deßwegen die Dreiecke ABC und abc ähnlich, da sie es mit dem Dreiecke ADE sind (§. 90. Zus. III.).

Zusatz: Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel der Ordnung nach gleich sind, so ist auch der dritte Winkel des einen Dreieckes dem dritten des anderen gleich (§. 43. Zus. II.), und die Dreiecke sind nach dem aufgestellten Lehrsatze einander ähnlich.

§. 93.

X. Lehrsatz:

Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel gleich ist, und die beiden einschließenden Seiten proportionirt sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 79.) in den beiden Dreiecken bac und BAC der Winkel a = A, und es verhalte sich ab : AB = ac : AC;

2) Man nehme auf der Seite AB die Linie AD = ab, und auf der Seite AC des Dreieckes BAC die Linie AE = ac, und ziehe die gerade Linie DE;

3) Nach der Voraussetzung verhält sich ab : AB = ac : AC, und also auch, weil ab = AD, und ac = AE, die Linie AD : AB = AE : AC, weßhalb DE zu BC parallel ist (§. 83.), und das Dreieck ADE dem Dreieck ABC ähnlich ist (§. 91.), oder △ ADE ∽ △ ABC;

4) Nach der Annahme (per hyp.) ist der Winkel A = a, dann nach Nro. 2. ist AD = ab, und AE = ac, also ist das Dreieck ADE mit dem Dreiecke abc kongruent (§. 20.), somit auch △ ADE ≌ △ abc, woraus nach Nro. 3. folgt, daß △ abc ∽ △ ABC.

§. 94.

XI. Lehrsatz:

Wenn in zwei Dreiecken alle drei Seiten der Ordnung nach proportionirt sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 79.) in den beiden Dreiecken abc und ABC alle Seiten der Ordnung nach zu einander proportionirt, somit

ab : AB = ac : AC,
dann ab : AB = bc : BC,
und ac : AC = bc : BC;

2) Man nehme auf der Seite AB des Dreieckes ABC die Linie AD = ab, und auf AC die Linie AE = ac, und ziehe von D nach E die gerade Linie DE;

3) In der bei Nro. 1. vorausgesetzten ersten Proportion setze man AD anstatt ab, und AE anstatt ac, man findet, daß AD : AB = AE : AC, weßhalb DE zu BC parallel (§. 83.), und das Dreieck ADE dem Dreiecke ABC ähnlich ist (§. 91.);

4) Nach der Voraussetzung bei Nro. 1. verhält sich ab : AB = bc : BC, und, weil AD = ab gemacht wurde,

AD : AB = bc : BC,
ferner AD : AB = DE : BC (§. 82.),
also bc : BC = DE : BC (Arithm. IV. §. 43.),
und bc = DE, gleichwie BC = BC (Arithm. IV. §. 35. Zus. III.);

5) Nach Nro. 2. ist AD = ab, und AE = ac, und nach Nro. 4. ist DE = bc, weßhalb △ ADE ≌ △ abc, und daher nach Nro. 3. auch abc ähnlich dem Dreiecke ABC.

§. 95.

XII. Lehrsatz:

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten proportionirt sind, und ein Winkel gleich ist, der der größeren dieser beiden Seiten gegenüber steht, so sind die Dreiecke ähnlich.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 80.) in den Dreiecken abc und ABC der Winkel b = B, dann die Seite ac größer als ab, und AC größer als AB, und es verhalte sich ab : AB = ac : AC;

2) Man mache auf der Seite AB des Dreieckes ABC die Linie DB = ab, und ziehe durch D die Linie DE zu AC parallel, so ist △ BDE ∽ ABC (§. 91.);

3) Nach der Voraussetzung ist

ab : *AB* = ac : *AC*,
und DB : *AB* = DE : *AC* (§. 82.),

mithin DB : ab = DE : ac (Arithm. IV. §. 43.), und DE = ac, gleichwie DB = ab (Arithm. IV. §. 35. Zus. II.);

4) In den beiden Dreiecken DBE und abc ist jetzt DB = ab, dann DE = ac, und *B* = b, daher ist △ DBE ≌ △ abc (§. 34.), also △ DBE ∽ △ abc; nach Nro. 2. ist △ DBE ∽ △ ABC; mithin ist auch △ abc ∽ △ ABC (§. 90. Zus. III.).

Zusatz: Zwei rechtwinklichte Dreiecke sind ähnlich, wenn ein Perpendikel, und die Hypotenuse einander proportionirt sind, weil bei ihnen die rechten Winkel, welche den größeren Seiten, den Hypotenusen, gegenüber stehen, einander gleich sind.

Anmerkung: Man vergleiche die hier in den §§. 92, 93, 94 und 95. über die Aehnlichkeit der Dreiecke aufgestellten Lehrsätze mit den über die Kongruenz der Dreiecke in den §§. 20, 22, 24 und 34. angeführten Lehrsätzen.

§. 96.

XIII. Lehrsatz:

Wenn man im rechtwinklichten Dreiecke vom rechten Winkel auf die Hypotenuse ein Perpendikel zieht, so sind die zwei neuen Dreiecke dem ganzen Dreiecke, und unter sich ähnlich.

Beweis:

1) Man ziehe (Fig. 81.) im rechtwinklichten Dreiecke ABC vom rechten Winkel *B* auf die Hypotenuse *AC* das Perpendikel *BD*;

2) Es ist der Winkel ABC als ein rechter Winkel dem rechten Winkel p gleich, und der Winkel BAD ist gleich dem Winkel B*A*C, da der Winkel *A* den beiden Dreiecken B*A*D und B*A*C gemeinschaftlich ist, weßhalb △ B*A*D ∽ B*A*C (§. 92. Zus.);

3) Eben so ist auf der anderen Seite der rechte Winkel ABC = q, und BCD = BCA wegen des gemeinschaftlichen Winkels bei C; um deßwillen ist auch △ BDC ∽ ABC;

4) Sind zwei Dreiecke dem nämlichen dritten ähnlich, so sind sie es auch unter sich (§. 90. Zus. III.); daher ist △ BAD ∽ BDC, d. h., die auf diese Weise erhaltenen zwei neuen Dreiecke sind dem ganzen Dreiecke, und unter sich ähnlich.

I. Zusatz: Wenn man im rechtwinklichten Dreiecke vom rechten Winkel auf die Hypotenuse ein Perpendikel zieht, so ist solches die mittlere geometrische Proportionallinie zu den abgeschnittenen Stücken der Hypotenuse.

Denn zieht man (Fig. 81.) im rechtwinklichten Dreiecke ABC vom rechten Winkel B auf die Hypotenuse AC das Perpendikel BD, so ist nach dem hier aufgestellten Lehrsatze das Dreieck BAD dem Dreiecke BDC ähnlich; daher verhält sich AD : BD = BD : DC (§. 90. Zus. I.), oder kürzer AD : BD : DC, indem in diesen ähnlichen Dreiecken die Seiten AD und BD den gleichen Winkeln m und C, und die Seiten BD und DC den gleichen Winkeln A und n gegenüber stehen, und deßhalb homologe oder gleichnamige Seiten sind.

II. Zusatz: Zieht man im rechtwinklichten Dreiecke vom rechten Winkel auf die Hypotenuse ein Perpendikel, so ist jeder Kathet des ganzen Dreieckes die mittlere geometrische Proportionallinie zu dem anliegenden Stücke der Hypotenuse, und zur ganzen Hypotenuse.

Denn (Fig. 81.) ist BD perpendikulär auf AC, und ABC ein rechter Winkel, so ist nach dem Lehrsatze △ ABD ∽ △ ABC, und BDC ∽ ABC, und daher verhält sich (§. 90. Zus. I.)

AD : AB = AB : AC,
und DC : BC = BC : AC,
oder AD : AB : AC,
und DC : BC : AC.

§. 97.

XIV. Lehrsatz:

Wenn man im rechtwinklichten Dreiecke alle drei Seiten mit einerlei Maaße mißt, und dadurch ihre Größe in Zahlen ausdrückt, so ist die Quadratzahl der Hypotenuse den Quadratzahlen der beiden Katheten gleich, oder kürzer, das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Perpendikel.

Beweis:

1) Man ziehe (Fig. 81.) im rechtwinklichten Dreiecke ABC vom rechten Winkel B auf die Hypotenuse das Perpendikel B*D*, es verhält sich nach dem II. Zusatze des vorigen §.

$$AD : AB : AC,$$
und $DC : BC : AC$;

2) Man verwandle diese stättigen geometrischen Proportionen in Gleichungen (Arithm. IV. §. 35. Zus. V.), und addire die letzteren (Arithm. I. §. 25. I.):

$$AD \times AC = AB^2,$$
und $DC \times AC = BC^2$,

also $AD \times AC + DC \times AC = AB^2 + BC^2$;

3) Die beiden Summanden auf der ersten Seite der letzten Gleichung löse man in Faktoren auf (Arithm. III. §. 87. Nro. IV.), und setze dann anstatt $AD + DC$ das Ganze AC; es ist

$AD \times AC + DC \times AC = (AD + DC) \times AC = AC \times AC = AC^2$, und deßhalb $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

I. Zusatz: Umgekehrt, wenn in einem Dreiecke die drei Seiten, durch einerlei Maaß bestimmt, so beschaffen sind, daß das Quadrat einer Seite der Summe der Quadrate der beiden übrigen gleich ist, so ist das Dreieck rechtwinklicht.

Es sei (Fig. 117.) im Dreiecke ACB die Quadratzahl der Seite *CB* oder $CB^2 = AC^2 + AB^2$, und man errichte am Punkte *A* auf *AB* das Perpendikel *DA* (§. 45.), welches man gleich *AC* macht, so daß $AD = AC$

ist, also auch $AD^2 = AC^2$ (Arithm. III. §. 70. I.); ferner ist nach dem Lehrsatze

$BD^2 = DA^2 + AB^2$, und, weil $AD^2 = AC^2$,
$BD^2 = AC^2 + AB^2$, dann nach der Annahme ist
$CB^2 = AC^2 + AB^2$,

also ist $BD^2 = CB^2$, und $BD = CB$ (Arithm. III. §. 70. I.).

Es ist jetzt $DB = BC$, dann $AC = AD$ (ex construct.), und $AB = AB$, also ist $\triangle ADB \cong \triangle ACB$ (§. 24.), und der Winkel $m = n = 90$ Grad (§. 18. Zus. IV. und §. 8. c.), d. h., das Dreieck ABC ist rechtwinklicht, und der Winkel n oder BAC, welcher der Seite BC gegenüber steht, ist ein rechter Winkel, wenn $CB^2 = AB^2 + AC^2$.

II. Zusatz: Man bekommt im rechtwinklichten Dreiecke das Quadrat eines Katheten, wenn man vom Quadrate der Hypotenuse das Quadrat des anderen Katheten abzieht; denn nach dem Lehrsatze ist (Fig. 81.)

$AC^2 = AB^2 + BC^2$,
also $AC^2 - BC^2 = AB^2$,
und $AC^2 - AB^2 = BC^2$ (Arithm. III. §. 96. Zus. I.).

III. Zusatz: Im rechtwinklichten Dreiecke ist jeder Kathet die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der Summe, und der Differenz der beiden übrigen Seiten.

Denn nach dem II Zusatze ist (Fig. 81.)

$AB^2 = AC^2 - BC^2$,
und $BC^2 = AC^2 - AB^2$,
daher $AB^2 = (AC + BC) \times (AC - BC)$ } (Arithm. III.
und $BC^2 = (AC + AB) \times (AC - AB)$ } §. 87. Nro. VI.),
weßhalb $AC + BC : AB : AC - BC$ } (Arithm. IV. §.
und $AC + AB : BC : AC - AB$ } 35. Zus. VII.).

Anmerkung: Der in diesem §. aufgestellte XIV. Lehrsatz, welcher wegen seines großen Einflusses in alle Theile der reinen und angewandten Mathematik Magister Matheseos» heißt, wird von seinem Erfinder, dem griechischen Weltweisen, Pythagoras, gewöhnlich der pythagorische Lehrsatz genannt. Man hat mehr als vierundzwanzig Beweisarten, um seine Evidenz zu zeigen; von denselben werden in der Folge in diesem Lehrbuche an den geeigneten Stellen noch mehrere vorkommen.

§. 98.

V. Aufgabe, zu zwei gegebenen Seiten eines rechtwinklichten Dreieckes die dritte Seite zu finden.

I. Auflösung:

1) Man verzeichne einen rechten Winkel, trage auf den Schenkeln, im Falle die Hypotenuse gesucht wird, die beiden gegebenen Katheten auf, und verbinde die erhaltenen Durchschnittspunkte durch eine gerade Linie, so ist diese die gesuchte Hypotenuse;

2) Wird aber ein Kathetus gesucht, so trage man auf einem Schenkel des gezeichneten rechten Winkels den anderen gegebenen Kathetus auf, beschreibe vom Durchschnittspunkte als Zentrum einen Kreisbogen mit der als Radius angenommenen gegebenen Hypotenuse, bis der andere Schenkel geschnitten wird, es ist jetzt das bestimmte Stück dieses letzteren vom Scheitel des rechten Winkels bis zum neuen Durchschnittspunkte der verlangte Kathetus.

II. Auflösung:

1) Wird die Hypotenuse gesucht, so messe man die beiden gegebenen Katheten mit dem nämlichen Längenmaaße, ziehe aus der Summe der Quadrate der beiden Zahlen, welche die Größe der Katheten angeben, die Quadratwurzel aus, so gibt diese die Größe der verlangten Hypotenuse im nämlichen Längenmaaße an;

2) Sucht man aber einen Kathetus, so messe man die Hypotenuse, und den gegebenen anderen Kathetus mit dem nämlichen Längenmaaße, subtrahire die Quadratzahl des Kathetus von der Quadratzahl der Hypotenuse, und ziehe aus der Differenz die Quadratwurzel aus.

I. Beispiel:

Es sei (Fig. 81.) zu den zwei gegebenen Katheten *BD* und *DC* die Hypotenuse zu finden.

I. Auflösung:

Man verzeichne den rechten Winkel BDC, trage

auf dem einen Schenkel den Kathetus *BD*, und auf dem anderen den Kathetus *DC* auf, und verbinde die Punkte *B* und *C* durch die gerade Linie *BC*, so ist diese die verlangte Hypotenuse.

II. Auflösung:

Man messe die Linien *BD* und *DC* mit dem nämlichen Längenmaaße, gesetzt *BD* habe 3, und *DC* habe 4 Schuh, erhebe diese Zahlen zum Quadrate (Arithm. III. §. 27.), addire die beiden Quadrate 9 und 16, und ziehe aus der Summe 25 die Quadratwurzel aus (Arithm. III. §. 29.), man erhält zur Wurzel 5, weßhalb die Länge der Hypotenuse 5 Schuh beträgt.

II. Beispiel:

Man suche (Fig. 81.) zu der Hypotenuse *BC* und dem Kathetus *BD* den anderen Kathetus.

I. Auflösung:

Man verzeichne einen rechten Winkel, trage auf dem einen Schenkel den gegebenen Kathetus *BD* auf, und beschreibe von *B* aus mit der Hypotenuse *BC* einen Kreisbogen, bis dieser den anderen Schenkel des rechten Winkels im Punkte *C* schneidet; es ist jetzt die bestimmte Linie *DC* der verlangte Kathetus.

II. Auflösung:

Man messe die Linien *BC* und *BD* mit dem nämlichen Längenmaaße, gesetzt *BC* habe 5, und *BD* habe 3 Schuh, erhebe diese Zahlen zum Quadrate, ziehe das Quadrat 9 vom Quadrate 25 ab, und ziehe aus dem Reste 16 die Quadratwurzel aus; die gefundene Wurzel 4 gibt die gesuchte Länge des anderen Kathetus in Schuhen.

Anmerkung: Hat man drei Linien, von welchen die erste 3, die zweite 4, und die dritte 5 Schuh hat, die sich demnach verhalten, wie die Zahlen 3, dann 4 und 5, und verbindet man sie zu einem Dreiecke (§. 19.), so erhält man nach dem I. Zusatze dieses §. ein rechtwinklichtes Dreieck, wo der der Seite 5 opponirte Winkel ein rechter Winkel ist, indem $5^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.

Außer diesen drei Zahlen 3, 4 und 5, und ihren Vielfachen 3n, 4n und 5n, z. B. 6, 8 und 10, oder 9, 12 und 15 ꝛc. gibt es noch unbestimmbar viele Zahlen, welche die Größe dreier Linien ausdrücken können, die allemal ein rechtwinklichtes Dreieck geben; z. B. 5, 12 und 13, da $13^2 = 12^2 + 5^2 = 169$.

§. 99.

XV. Lehrsatz:

Wenn man in ähnlichen Dreiecken ein Paar homologer Seiten zu Grundlinien annimmt, und von den Spitzen die Höhen zieht, so verhalten sich die Grundlinien wie die Höhen.

Beweis:

1) Man nehme (Fig. 82.) in den beiden ähnlichen Dreiecken ABC und abc die homologen Seiten AC und ac zu Grundlinien an, und ziehe von den Spitzen B und b die Höhen BD und bd (§. 33.);

2) Es ist der Winkel m gleich dem rechten Winkel p, da die Höhen auf die Grundlinien perpendikulär stehen (§. 18. f.), und der Winkel A ist gleich dem homologen Winkel a, weil die beiden Dreiecke einander ähnlich sind (§. 90. Zus. I.), weßhalb das Dreieck BAD dem Dreiecke bad ähnlich ist (§. 92. Zus.), und also

$$BA : ba = BD : bd,$$

ferner per hyp. ist $\underline{BA : ba = AC : ac},$

folglich $AC : ac = BD : bd$ (Arithm. IV. §. 43.).

Das heißt, in dieser Voraussetzung sind die Grundlinien mit den Höhen proportionirt.

Zusatz: Nimmt man bei kongruenten Dreiecken zwei gleiche Seiten als Grundlinien an, und zieht man von den Spitzen die Höhen, so sind diese letzteren einander gleich. Denn (Fig. 85.) wenn $\triangle ACB \cong \triangle DCE$, dann $AB = DE$, und $AC = DC$, wie auch $A = D$, so ist $G = F = 90°$, und $\triangle ACG \cong \triangle DCF$, weßhalb $CG = CF$, das heißt, die Höhen CG und CF sind einander gleich.

§. 100.

XVI. Lehrsatz:

Aehnliche geradlinigte Figuren werden durch ähnliche Diagonalen der Ordnung nach in lauter ähnliche Dreiecke getheilt.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 78.) die beiden Siebenecke ähnliche Figuren, und man ziehe von den homologen Winkeln A und a die ähnlichen Diagonalen AC und ac, dann AD und ad rc. zu allen übrigen Ecken;

2) Nach der Annahme sind die beiden Vielecke ähnlich, mithin der Winkel $B = b$, und $AB : ab = BC : bc$ (§. 90. Zus. I.), weßhalb das Dreieck ABC dem Dreiecke abc ähnlich ist (§. 93.);

3) Bei diesen ähnlichen Vielecken ist der Winkel $BCD = bcd$, und nach Nro. 2. ist der Winkel $h = m$, also $BCD - h = bcd - m$ (Arithm. I. §. 34. 1.), oder $ACD = acd$;

dann per hyp. ist $BC : bc = CD : cd$,
und nach Nro. 2. ist $BC : bc = AC : ac$,

also $CD : cd = AC : ac$ (Arithm. IV. §. 43.).

Daher ist das Dreieck ACD dem Dreiecke acd ähnlich (§. 93.).

4) Auf eine ähnliche Weise läßt sich der Beweis für jedes folgende Dreieck fortsetzen; es werden demnach ähnliche geradlinigte Figuren durch ähnliche Diagonalen der Ordnung nach in lauter ähnliche Dreiecke getheilt.

Zusatz: Wenn zwei geradlinigte Figuren aus einer gleichen Anzahl ähnlicher Dreiecke der Ordnung nach zusammengesetzt sind, so daß jedes Dreieck mit dem folgenden eine Seite gemein hat, so sind die Figuren ähnlich.

Finden (Fig. 78.) bei den beiden Siebenecken, welche von den Ecken A und a aus durch Diagonalen in Dreiecke getheilt sind, diese Bedingungen Statt, so haben die Figuren gleich viele Seiten; ferner sind dann wegen der Gleichheit der Dreieckswinkel alle ihre Win-

kel der Ordnung nach gleich, und alle homologen Seiten zu einander proportionirt, weßhalb solche Figuren ähnlich sind (§. 90. Zus. I.).

§. 101.

XVII. Lehrsatz:

In ähnlichen geradlinigten Figuren verhalten sich die Perimeter, wie jedes Paar homologer Seiten, oder wie jedes Paar homologer Diagonalen.

Beweis:

1) Man theile (Fig. 78.) die beiden ähnlichen Figuren ABCDEFG und abcdefg durch ähnliche Diagonalen in ähnliche Dreiecke (§. 100.);

2) Weil die Figuren ähnlich sind, so sind die homologen Seiten zu einander proportionirt (§. 90. Zus. I.), mithin $AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EF : ef = FG : fg = GA : ga$;

3) Bei gleichen geometrischen Verhältnissen verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede (Arithm. IV. §. 39. Zus. II.), daher ist $(AB + BC + CD + DE + EF + FG + GA) : (ab + bc + cd$ $de + ef + fg + ga) = AB : ab = BC : bc$ ꝛc.

4) Die Summe der Vorderglieder gibt den Perimeter der ersten Figur, und die Summe der Hinterglieder gibt den Perimeter der zweiten Figur (§. 12. d.), deßwegen ist

$$PER. : per. = AB : ab = BC : bc \text{ ꝛc.};$$

5) Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke verhält sich

$$AB : ab = AC : ac,$$

dann $CD : cd = AD : ad$ ꝛc.

folglich auch $PER. : per. = AC : ac = AD : ad$ ꝛc.

Das ist, in ähnlichen geradlinigten Figuren verhalten sich die Perimeter, wie jedes Paar homologer Seiten, oder homologer Diagonalen.

Anmerkung: 1) Will man überhaupt zwei ähnliche Dreiecke verzeichnen, so darf man nur auf einer kleineren oder größeren Grundlinie zwei Winkel verzeichnen, die den Winkeln des anderen Dreieckes gleich sind (§. 25.),

die beiden anderen Schenkel stoßen allemal in einem Punkte zusammen (§. 28. Zus. II. und §. 40.), und das erhaltene neue Dreieck ist dem vorigen ähnlich. Auf diese Weise wird (Fig. 82.) auf ac das Dreieck abc ähnlich dem Dreiecke ABC beschrieben, wenn der Winkel A = a, und C = c gemacht wird (§. 92. Zus.).

2) Weil man (Fig. 78.) über eine gegebene Linie ag eine Figur verzeichnen, welche dem Siebenecke ABCDEFG ähnlich ist, so ziehe man aus A zu den übrigen Ecken die möglichen Diagonalen, und mache der Ordnung nach das Dreieck agf ähnlich dem Dreiecke AGF, dann das Dreieck afe ähnlich dem Dreiecke AFE rc., so erhält man die neue ähnliche Figur (§. 100. Zus.).

3) Wie mittels der Proportionallinien ähnliche Figuren gezeichnet werden, wird später beim Gebrauche des verjüngten Maaßstabes gezeigt werden (§. 86. Anm. 1.).

II. Abschnitt.

Von Verhältnissen gerader Linien im Kreise.

§. 102.

I. Lehrsatz:

Wenn man aus einem beliebigen Punkte der Peripherie eines Kreises ein Perpendikel auf den Durchmesser, oder von einem beliebigen Punkte des Diameters ein Perpendikel an die Peripherie zieht, so ist solches die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen den Segmenten des Diameters.

Beweis:

1) Man ziehe (Fig. 83.) von dem Endspunkte D des Perpendikels DE zu den Endspunkten des Diameters AB die Sehnen DA und DB; es ist der Winkel ADB ein rechter Winkel (§. 71. Zus. III.), und DE ein aus dem rechten Winkel auf die Hypotenuse gezogenes Perpendikel;

2) Daher verhält sich AE : ED = ED : EB (§. 96. Zus. I.), oder AE : ED : EB, d. h., das Perpendikel ED, welches von einem Punkte der Peripherie auf den Durchmesser, oder von diesem zur Peripherie gezogen wird, ist die mittlere geometrische Proportionallinie zu den Stücken oder Segmenten des Durchmessers.

I. Zusatz: Da man (Fig. 83.) im Durchmesser AB jeden beliebigen Punkt annehmen, und davon zur Peripherie ein Perpendikel ziehen kann, so sind die Segmente AE und EB veränderliche Größen, man setze also $AE = x$, dann $DE = y$, und den unveränderlichen Durchmesser $AB = a$ (Arithm. III. §. 43. d.); so wird das andere Segment $EB = AB - AE = a - x$, und die stättige geometrische Proportion AE : ED : EB verwandelt sich rücksichtlich der Bezeichnung der Linien in die Proportion $x : y : a - x$, wo nach der im IV. Theile der Arithmetik §. 35. Zus. V. aufgestellten Regel das Quadrat des mittleren Gliedes dem Produkte der äußeren Glieder gleich ist, mithin $y^2 = ax - x^2$.

II. Zusatz: Man nennt (Fig. 83.) den Durchmesser AB oder a die Abszissenlinie der beiden Stücke desselben, und AE und EB, oder x und $a - x$ die Abszissen, und das Perpendikel DE oder y die rechtwinklichte Ordinate oder bloß die Ordinate des Kreises.

Es ist demnach, da nach dem I. Zusatze $y^2 = ax - x^2$, das Quadrat der Ordinate des Kreises gleich dem Produkte aus den dazu gehörigen Abszissen des Diameters; daraus läßt sich für einen angenommenen Halb- oder Durchmesser des Kreises für jede beliebige Abszisse die entsprechende Ordinate, und für jede Ordinate die Abszisse berechnen.

a) Setzt man die Abszisse $x = o$, und dann $x = a$, so ist $y^2 = a \times o - o = o$, und $y^2 = a \times a - a^2 = a^2 - a^2 = o$, also $y = o$, das ist, am Anfangspunkte *A*, und am Endspunkte *B* des als Abszissenlinie angenommenen Diameters *AB* ist die Ordinate gleich Null.

b) Setzt man die Abszisse x gleich dem Radius des Kreises, also $= \frac{1}{2}a$, so ist $y^2 = a \times \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$, mithin $y = \pm \frac{1}{2}a$ (Arithm. IV.

§. 20.); das ist, im Mittelpunkte des Durchmessers ist die Ordinate des Kreises dem Halbmesser gleich, und es gibt im Zentrum die Ordinate $+ \frac{1}{2}a$ und $- \frac{1}{2}a$, somit zwei dem Radius gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten, von welchen die eine positiv, und die andere negativ, und die Richtung nach unten hat, im Falle die andere die Richtung nach oben hat.

c) Setzt man umgekehrt die Ordinate $y = o$, und sucht man die Abszisse x, so ist $o = ax - x^2$, und $x = \pm \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$ (Arithm. IV. §. 21.); nimmt man die positive Wurzel $+ \frac{1}{2}a$, so ist $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$, und nimmt man die negative Wurzel $- \frac{1}{2}a$, so ist $x = - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = o$; d. h., wenn die Ordinate gleich Null ist, so ist die Abszisse auch gleich Null, oder gleich dem Durchmesser, und es gibt am Anfangspunkte, und am Endspunkte des Diameters eine solche Ordinate.

d) Setzt man endlich die Ordinate $y = \frac{1}{2}a$, und sucht man x, so ist $\frac{1}{4}a^2 = ax - x^2$, und $x = \frac{1}{2}a$, d. h., wenn die Ordinate dem Radius gleich ist, so beträgt auch die entsprechende Abszisse einen Halbmesser.

Anmerkung: 1) Die Lage eines jeden Punktes der Peripherie des Kreises ist durch die Größe der entsprechenden Abszisse und Ordinate bestimmt, und die Gleichung $y^2 = ax - x^2$, welche das Verhältniß der Ordinaten und Abszissen für jeden Punkt der Peripherie angibt, wird die Gleichung des Kreises genannt.

2) Um die Anfänger durch die Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie im algebraischen Kalkul zu üben, führte ich hier mittels der aufgelös'ten quadratischen Gleichungen die verschiedenen Werthe für die Ordinaten und Abszissen an; man ersieht daraus, in wie ferne der bei der Ausziehung der Quadratwurzel gefundene doppelte Werth, der positive und der negative (Arithm. III. §. 73. Zus. I.), einen bestimmten Sinn hat.

3) Der Herr Baron v. Wolf stellt folgende Kreisgleichung auf: $y^2 = a^2 - x^2$.

Er setzt nämlich (Fig. 83.) $AC = CB = a$, denkt sich die Ordinate CD, nimmt x von C aus nach A, so daß $CE = x$, und $AE = AC - EC = a - x$, wie auch $EB = a + x$ wird; es verhält sich nach dem Lehrsatze dieses §.

$$BC + CE : y : AE;\ a + x : y : a - x;$$
$$y^2 = (a + x)(a - x);\ y^2 = a^2 - x^2.$$

4) In dieser Gleichung kann man ebenfalls beim bekannten Durchmesser oder Halbmesser des Kreises aus der Abszisse die Ordinate, und aus dieser jene, berechnen. Setzt man $y = o$, so ist $x = \pm a$, und ist $y = a$, so ist $x = o$; eben so ist $y = \pm a$, wenn $x = o$, und y ist $= o$, wenn $x = a$, da bei dieser Kreisgleichung der Mittelpunkt des Kreises als Anfangspunkt der Abszissen genommen wird (Arithm. IV. §. 20.).

§. 103.

I. Aufgabe, zu zwei gegebenen Linien die mittlere geometrische Proportionallinie zu finden.

I. Auflösung:

1) Es seien (Fig. 83.) die beiden Linien *A*E und E*B* gegeben, und man soll zu ihnen die mittlere geometrische Proportionallinie finden;

2) Man trage diese beiden Linien neben einander auf einer geraden Linie auf, so daß *AB* die Summe beider ausdrückt, und deßhalb $= AE + EB$;

3) Man halbire die Linie *AB* (§. 27.), und beschreibe vom Mittelpunkte *C* aus mit dem Halbmesser *CA*, der die Hälfte von *AB* ist, einen Kreis;

4) Man errichte vom Punkte E zur Peripherie des Kreises das Perpendikel ED (§. 32.), so ist dieses die verlangte mittlere geometrische Proportionallinie zu den gegebenen Linien *A*E und E*B*, da sich nach §. 102. verhält

$$AE : ED : EB.$$

II. Auflösung:

Man messe die gegebenen Linien *A*E und E*B* mit dem nämlichen Längenmaaße, und drücke so ihre Größe in Zahlen aus; ferner suche man zu diesen beiden Zahlen die mittlere geometrische Proportionalzahl (Arithm. IV. §. 37.), so gibt diese die Größe der gesuchten mittleren Proportionallinie an, welche dann nach dem nämlichen Maaße aufgetragen wird (§. 86. Anmerk. 1.).

§. 104.

II. Lehrsatz:

Wenn sich im Kreise zwei Sehnen durchschneiden, so sind die abgeschnittenen Stücke umgekehrt zu einander proportionirt.

Beweis:

1) Man verbinde (Fig. 84.) die Endspunkte der Sehnen *AB* und CD, welche sich im Punkte E schneiden, durch die Sehnen *AC* und D*B*;

2) Die Winkel *A* und D sind Peripheriewinkel, und stehen auf dem nämlichen Bogen C*B* auf, weßhalb der Winkel *A* = D (§. 71. Zus. II.);

3) Eben so sind die Winkel *C* und *B* Peripheriewinkel, und stehen auf dem Bogen *A*D auf, weßhalb der Winkel *C* = *B*;

4) Es sind also die Dreiecke DEB und AEC ähnlich (§. 92. Zus.), und es verhält sich AE : EC = ED : E*B*, da die Seiten AE und ED den gleichen Winkeln C und *B*, und EC und E*B* den gleichen Winkeln A und D gegenüber stehen;

5) Weil endlich dem ersten Gliede *A*E in der Proportion das vierte Glied E*B*, und dem zweiten EC das dritte ED entspricht, so sind die abgeschnittenen Stücke der Sehnen, die sich durchschneiden, zu einander umgekehrt proportionirt (Arithm. II. §. 60.).

§. 105.

III. Lehrsatz:

Im Kreise liegt von zwei ungleichen Sehnen die größere dem Mittelpunkte näher, und umgekehrt, wenn zwei Sehnen ungleich vom Mittelpunkte entfernt sind, so ist jene größer, die dem Zentrum näher liegt.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 85.) die Sehne *AB* größer als DE, so ist ½A*B* > ½DE, oder *A*G > DF, da die von

des Kreises Mittelpunkte gezogenen Perpendikel CG und CF die Entfernungen der Sehnen vom Zentrum angeben, und die Sehnen halbiren (§. 56.);

2) Der Radius AC ist gleich dem Halbmesser DC (§. 14. Zus. IV.), somit (Arithm. III. §. 70. I.)

$AC^2 = DC^2$,
dann $AG^2 > DF^2$,

also $AC^2 - AG^2 < DC^2 - DF^2$ (Arithm. I. §. 34. III.),
oder $CG^2 < CF^2$ (§. 97. Zus. II.),
und $CG < CF$. Das ist, die größere Sehne liegt dem Mittelpunkte näher, als die kleinere.

3) Ist umgekehrt $CG < CF$, so ist CG^2 kleiner als CF^2; ferner

$AC^2 = CD^2$,
dann $CG^2 < CF^2$,

also $AC^2 - CG^2 > CD^2 - CF^2$,
oder $AG^2 > DF^2$,
und $AG > DF$,
das ist, $\frac{1}{2}AB > \frac{1}{2}DE$,
folglich $AB > DE$. Das heißt, jene Sehne ist größer, welche dem Mittelpunkte näher liegt.

Anmerkung: Aus dem vorstehenden Lehrsatze folgt ebenfalls, daß der Durchmesser die größte Sehne ist, was schon im §. 14. Zus. VII. gezeigt wurde.

§. 106.

IV. Lehrsatz:

Errichtet man an dem einen Endspunkte des Durchmessers eine Tangens, und an dem anderen eine Sekans des Kreises, und verlängert man diese beiden Linien, bis sie sich schneiden, so ist die Tangens die mittlere geometrische Proportionallinie zum Stücke der Sekans außer dem Kreise, und zur ganzen Sekans.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 86.) von einem Endspunkte A des Diameters AB die Tangens AD, und von dem anderen B

die

die Sekans *BD* gezogen, welche im Punkte *D* mit der Tangens zusammen trifft, und man ziehe noch die Sehne *AE*;

2) Es verhält sich jetzt nach dem II. Zusatze des §. 96.

DE : *AD* : *DB*.

Das ist, die Tangens ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem Stücke der Sekans außer dem Kreise und der ganzen Sekans, wenn diese auf dem Diameter steht.

§. 107.

V. Lehrsatz:

Wenn sich zwei Sekanten außer dem Kreise schneiden, so verhalten sich die Stücke außer dem Kreise umgekehrt, wie die ganzen Sekanten.

Beweis:

1) Man ziehe (Fig. 87.) vom Punkte *A* zu *D*, dann von E nach F die Sehnen *AD* und EF, um so die Punkte zu verbinden, wo die außer dem Kreise in *B* sich schneidenden Sekanten *AB* und *DB* mit der Kreislinie zusammen treffen;

2) Weil die Peripherie des Kreises durch die vier Ecke des Viereckes *A*F geht, so sind die opponirten Winkel

$A + q = 180^\circ$, und $D + n = 180^\circ$ (§. 71. Zus. V.),

dann $p + q = 180^\circ$, und $m + n = 180^\circ$ (§. 11. Zus. III.),

also $A + q = p + q$, und $D + n = m + n$ (Arithm. I. §. 10. Nr. 4.),

folglich ist der Winkel $A = p$, und $D = m$ (Arithm. I. §. 34. I.);

3) Das Dreieck EBF ist demnach dem Dreiecke ABD ähnlich (§. 92. Zus.), weßhalb E*B* : *B*F = *BD* : *B*A, da den Seiten E*B* und *BD* die gleichen Winkel p und *A*, und den Seiten *B*F und *B*A die gleichen Winkel m und *D* opponirt sind.

Es sind also die beiden Stücke außer dem Kreise *B*E und *B*F zu den ganzen Sekanten *B*A und *BD* umgekehrt proportionirt, indem in der angeführten Proportion E*B* : *B*F = *BD* : *B*A die Sekans A*B* und ihr Stück E*B* die Stelle der äußeren, und die Sekans *BD* und ihr Stück *B*F die Stelle der mittleren Glieder einnehmen (Arithm. II. §. 60.).

§. 108.

II. Aufgabe, aus der gegebenen Größe des Radius und der Sehne die Entfernung der Sehne vom Mittelpunkte des Kreises zu bestimmen.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 88.) der Radius *AC* des um *C* beschriebenen Kreises und die Sehne *AB* gegeben, und man soll die Größe des Perpendikels *CD* bestimmen, welches vom Zentrum zur Sehne gezogen ist, und deßhalb die Entfernung der Sehne vom Zentrum angibt (§. 56. Zus. IV.);

2) Das Dreieck ADC ist wegen des rechten Winkels bei *D* rechtwinklicht, und deßhalb $CD^2 = AC^2 - AD^2$ (§. 97. Zus. II.), und $CD = \sqrt{(AC^2 - AD^2)}$;

3) Das Perpendikel *CD* halbirt die Sehne (§. 56.), weßhalb $AD = \frac{1}{2}AB$, und $AD^2 = \frac{1}{4}AB^2$ (Arithm. III. §. 70. I.); substituirt man nun in der Gleichung bei Nro. 2. anstatt AD^2 den gleichen Werth, so findet man, daß die Entfernung $CD = \sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4}AB^2)}$; d. h., man erhält die Entfernung der Sehne vom Zentrum, wenn man aus der Differenz der Quadrate des Radius und der halben Sehne die Quadratwurzel auszieht (§. 98. Auflös. II. Nro. 2.).

I. **Zusatz:** Bezeichnet man überhaupt den Radius eines Kreises mit r, die Sehne oder Chorde mit c, und ihre Entfernung vom Zentrum durch d, so ist $d = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}$.

II. **Zusatz:** Ist die Sehne dem Radius gleich, somit $r = c$, welches der Fall ist, wenn der der Sehne entsprechende Kreisbogen 60 Grad hält (§. 65.), so ist $d = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}r^2)} = \sqrt{\frac{3}{4}r^2} = \sqrt{(\frac{1}{4}r^2 \times 3)} = \frac{1}{2}r \times \sqrt{3}$ (Arithm. III. §. 71. Zus. I.) $= \frac{1}{2}r \times 1{,}7320508\ldots$ (Arithm. III. §. 30.) $= 0{,}8660254\ldots \times r$.

III. **Zusatz:** Ist endlich die Sehne c dem Radius r gleich, und $r = 1$, so ist die Entfernung der Sehne vom Mittelpunkte des Kreises, oder $d = 0{,}8660254$, im Falle man bei der Ausziehung der Quadratwurzel aus der Zahl 3 nur sieben Dezimalen durch die Annäherung bestimmt.

§. 109.

III. Aufgabe, aus dem gegebenen Radius und der Sehne eine Sehne zu berechnen, die zur Hälfte des Bogens der vorigen Sehne gehört.

Auflösung:

1) Es sei gegeben (Fig. 88.) die Sehne AB, und der Radius AC, und man soll die Sehne AE berechnen, welche zum Bogen AE gehört, der die Hälfte des zur Sehne AB gehörigen Bogens AEB ist;

2) Wegen des rechten Winkels bei D ist $AE^2 = AD^2 + DE^2$ (§. 97.), und $AE = \sqrt{(AD^2 + DE^2)}$;

3) $AD = \frac{1}{2}AB$, mithin $AD^2 = \frac{1}{4}AB^2$;

4) $DE = CE - CD$; nach dem I. Zusatze des vorigen §. ist aber $CE = r$, und $CD = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}$, somit $DE = r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}$, und $DE^2 = r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)} + r^2 - \frac{1}{4}c^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)} - \frac{1}{4}c^2$, indem man nach dem allgemeinen Quadrirungsgesetze (Arithm. IV. §. 1.) die zweitheilige Größe $CE - CD$, oder $r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}$ zum Quadrate erhebt, und die beiden r^2 in eine Summe bringt;

5) Setzet man bei Nro. 2. anstatt AD^2 und DE^2 die gefundenen gleichen Werthe, so findet man, daß

$$AE = \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}c^2)} - \tfrac{1}{4}c^2)}$$
$$= \sqrt{(2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}c^2)})}.$$

I. Zusatz: Ist wieder die Sehne dem Radius gleich, mithin $c = r$, so ist die Sehne eines Bogens von 30 Grad, da der vorige Bogen 60 Grad hat, oder

$$AE = \sqrt{(2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}r^2)})} = \sqrt{(2r^2 - 2r\sqrt{\tfrac{3}{4}r^2})}$$
$$= \sqrt{(2r^2 - 2r \times (\sqrt{3} \times \sqrt{\tfrac{1}{4}r^2}))}$$
$$= \sqrt{(2r^2 - 2r \times (\sqrt{3} \times \tfrac{1}{2}r))}$$
$$= \sqrt{(2r^2 - r^2\sqrt{3})} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})r^2)}$$
$$= r \times \sqrt{(2 - \sqrt{3})}.$$

II. Zusatz: Setzt man endlich die Sehne c dem Radius r gleich, und $r = 1$, so ist

$$AE = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{(2 - 1{,}7320508\ldots)}$$
$$= \sqrt{0{,}2679492\ldots} = 0{,}5176380\ldots$$

§. 110.

IV. **Aufgabe**, aus der gegebenen Sehne eines Kreisbogens, und der Entfernung seines mittleren Punktes von der Sehne den Durchmesser oder Radius des Kreises zu berechnen.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 88.) die Sehne *AB* des Kreisbogens AEB, und das Perpendikel E*D* gegeben, welches die Entfernung des mittleren Punktes des Bogens von der Sehne angibt (§. 33. Zus. II.);

2) Man errichte vom Mittelpunkte E des Bogens auf die Sehne das Perpendikel ED, und verlängere es auf beiden Seiten bis zur Peripherie des Kreises, so ist EF ein Durchmesser des Kreises, weil zu gleichen Bögen gleiche Sehnen gehören (§. 61. Zus. III.), und im gleichschenklichten Dreiecke AEB das Perpendikel E*D* die Sehne AB halbirt (§. 36. Zus. II.), und somit das am Mittelpunkte der Sehne errichtete Perpendikel durch das Zentrum des Kreises geht (§. 56. Zus. II.);

3) Die halbe Sehne *DB* ist jetzt eine rechtwinklichte Ordinate des Kreises, und die beiden Stücke des Diameters E*D* und *D*F sind die Abszissen desselben (§. 102. Zus. II.); daher verhält sich nach dem im §. 102. aufgestellten Lehrsatze E*D* : *DB* : *D*F;

4) In dieser Proportion suche man *D*F (Arithm. IV. §. 37.), es ist $DF = \frac{DB^2}{ED}$; das ist, man erhält das Segment *D*F, wenn man die halbe Sehne zum Quadrate erhebt, und das erhaltene Quadrat durch das Perpendikel *D*E dividirt;

5) Addirt man die beiden Stücke *D*E und *D*F, so hat man den Durchmesser EF, und dividirt man ihre Summe durch 2, so erhält man den Radius oder Halb-

messer des Kreises, indem der Durchmesser $EF = ED + DF$, und der Radius $EC = \frac{ED + DF}{2} = \frac{EF}{2}$.

Beispiel:

Die neue Donaubrücke bei Dilingen, welche unter der Leitung des eben so einsichtsvollen als thätigen Herrn Bauinspektors Friedrich Beischlag, jetzigen Bau-Rathes der königlichen Regierung des Ober-Donau-Kreises, gebaut wurde, besteht aus drei Kreisbögen von Eichenholz, wovon jeder 96 Schuh 8 Duodezimalzoll weit ist, und 9 Schuh in der Sprengung oder Höhe hat, so daß ihre ganze Länge 324 Schuh, ihre Breite 26 Schuh, und ihre Höhe bis zum niedrigsten Wasserstande 25 Schuh beträgt.

Es ist nun die Frage, wie groß ist der Radius der Kreislinie, von welcher diese drei Bögen Theile sind?

I. Auflösung:

1) Nach Figur 88. ist hier die Weite des Kreisbogens AEB, somit die Sehne AB, und die Entfernung des mittleren Punktes E von der Sehne gegeben; es ist nämlich die Weite des Bogens, oder die Sehne $AB = 96$ Schuh 8 Zoll, also $\frac{1}{2}AB = DB = 48$ Sch. 4 Z. $= 580$ Duodezimalzoll, und die Sprengung oder Höhe $ED = 9$ Sch. $= 108$ Duod. Zoll;

2) Nach der Auflösung der vorstehenden IV. Aufgabe ist $DF = \frac{DB^2}{ED}$, also $DF = \frac{580^2}{108} = \frac{580 \times 580}{108} = {}^{336400}/_{108} = 3114\,{}^{22}/_{27}$ Zoll;

3) Nach der Voraussetzung ist $DE = 108$ Zoll, und nach Nro. 2. ist $DF = 3114\,{}^{22}/_{27}$ Zoll, also $ED + DF$, oder der Durchmesser $EF = 108$ Z. $+ 3114\,{}^{22}/_{27}$ Z. $= 3222\,{}^{22}/_{27}$ Zoll $= 268$ Schuh $6\,{}^{22}/_{27}$ Zoll;

4) Der Halbmesser des Kreises dieser Bögen, oder

EC ist also gleich $3222\,^{22}/_{27}$ Zoll : 2 = $1611\,^{11}/_{27}$ Zoll = 134 Schuh $3\,^{11}/_{27}$ Zoll.

II. Auflösung:

Mittels der Logarithmen kann die Auflösung auch auf diese Weise geschehen:

1) Es ist $DF = \frac{580^2}{108}$;

$$\begin{aligned} \text{Log. } 580 &= 2{,}7634280 \\ &\quad \times 2 \\ \hline \text{also Log. } 580^2 &= 5{,}5268560, \\ \text{dann Log. } 108 &= 2{,}0334238, \\ \hline \text{mithin Log. } DF &= 3{,}4934332 = \text{Log. } 3114{,}82. \end{aligned}$$

2) Es beträgt demnach DF beinahe 3114,82 Zoll, und also $EF = DF + DE = 3114{,}82 + 108 = 3222{,}82$ Zoll = 268 Schuh 6,82 Zoll, und der Radius des Kreises oder E beträgt 1611,41 Zoll, also 134 Schuh 3,41 Zoll.

Anmerkung: Es kommt bei dieser Aufgabe der bürgerliche oder Werkschuh vor, welcher nach dem Duodezimalmaaße in 12 Zoll abgetheilt wird (Arithm. I. §. 79. Nro. 8.); indem da der halbe Schuh 6, das Drittel 4, das Viertel 3, und das Sechstel eines Fußes genau 2 Zoll beträgt.

IV. Hauptstück.

Von der Lage und den Verhältnissen der Kreislinien.

I. Abschnitt.

Von der Lage der Kreislinien gegen einander in einer Ebene.

§. 111.

Konzentrische und Berührungskreise 2c.

a) Wenn zwei Kreise in einer Ebene das nämliche Zentrum, und ungleiche Radien haben, so heissen sie konzentrische Kreise; daher sind (Fig. 17.) die beiden, mit den Radien CS und CQ um C beschriebenen Kreise konzentrische Kreise;

b) Kreise, derer Peripherien in einer Ebene nur einen Punkt gemein haben, sonst entweder ganz außerhalb einander liegen, oder von denen einer ganz innerhalb des anderen liegt, heissen Berührungskreise; daher sind (Fig. 91. und 92.) die um A und B beschriebenen Kreise Berührungskreise.

I. Zusatz: Die Peripherien zweier konzentrischer Kreise haben keinen Punkt gemein; indem alle Punkte der Kreislinie vom kleineren Halbmesser dem Zentrum näher liegen, als die Punkte der Kreislinie vom größeren Halbmesser.

II. Zusatz: Zwei Kreislinien in einer Ebene, die einander schneiden, haben eine gemeinschaftliche Sehne. Denn sie haben (Fig. 89 u. 90.) zwei, und nur zwei Punkte gemein (§. 58. Zus. II.); mithin ist die gerade Linie CD, welche diese Durchschnittspunkte verbindet, eine gemeinschaftliche Sehne für beide Kreise (§. 14. e.).

III. Zusatz: Wenn man in der nämlichen Ebene die gemeinschaftliche Sehne zweier, sich schneidender Kreislinien durch ein Perpendikel halbirt, so geht dieses durch die Mittelpunkte beider Kreise (§. 56. Zus.

II.), und ist deßwegen die Zentrallinie (§. 14. h.); auf diese Weise ist (Fig. 89.) das vom Mittelpunkte E der gemeinschaftlichen Sehne CD errichtete Verpendikel AB die Zentrallinie der um A und B beschriebenen Kreise.

IV. Zusatz: Die Zentrallinie steht allemal, wenn sich die beiden Kreise schneiden, in der Mitte auf der gemeinschaftlichen Sehne senkrecht. Denn (Fig. 89.) eine gerade Linie, welche in der nämlichen Ebene die gemeinschaftliche Sehne halbirt, und auf ihr senkrecht steht, geht durch die Mittelpunkte A und B (Zus. III.); zwischen diesen beiden Punkten ist aber nur eine gerade Linie möglich (§. 3. Zus. II.), nämlich die Zentrallinie.

V. Zusatz: Die Durchschnittspunkte zweier Kreislinien, die sich schneiden, können als Endspunkte der gemeinschaftlichen Sehne, auf welcher in ihrer Mitte die Zentrallinie senkrecht steht, nicht in dieser Zentrallinie liegen.

VI. Zusatz: Zwei Kreislinien in einer Ebene, derer Radien und Zentrallinien eine solche Größe haben, daß jedes Paar von diesen drei Linien größer, als die dritte ist, schneiden einander (§. 17.).

VII. Zusatz: Wenn zwei Kreislinien einander schneiden, so haben ihre Radien und die Zentrallinie eine solche Länge, daß zwei von diesen Linien zusammen allemal größer sind, als die dritte einzeln.

Denn man ziehe (Fig. 89.) an einen der beiden Durchschnittspunkte, etwa zu C, die Radien AC und BC, so bilden sie mit der Zentrallinie AB immer ein Dreieck (Zus. V.), wo also diese drei Linien als Seiten des Dreieckes die angegebene Größe haben (§. 18. Zus. II.).

VIII. Zusatz: Wenn zwei Kreislinien in einer Ebene einen Punkt gemein haben, der mit den beiden Mittelpunkten nicht in einer geraden Linie, mithin nicht in der Richtung der Zentrallinie liegt, so haben sie noch einen Punkt gemein, und durchschneiden also einander.

Denn (Fig. 89.) zieht man zum gemeinschaftlichen Punkte C der Peripherien die Radien AC und BC, und die Zentrallinie AB, so bilden diese drei Linien ein Dreieck, wo zwei von diesen Linien zusammen allemal größer sind, als die dritte (§. 18. Zus. II.), und die

beiden Kreislinien haben deßwegen noch einen Punkt gemein, das ist, sie schneiden sich (Zus. VI.)

Anmerkung: 1) Weil die konzentrischen Kreise in einer Ebene das nämliche Zentrum haben, so müssen ihre Radien allemal ungleich sein; sonst wären sie nur eine Kreislinie (§. 15.).

2) Der im vorstehenden VI. Zusatze angeführte Satz ist schon im §. 17. als Lehrsatz aufgestellt und erwiesen worden; weil man denselben bei der Konstruktion der Dreiecke benützen muß, um zu erkennen, ob man aus drei gegebenen geraden Linien ein Dreieck verzeichnen kann oder nicht (§. 19.).

§. 112.

I. Lehrsatz:

Von zwei ungleichen Kreislinien, die einander in der nämlichen Ebene schneiden, und derer Mittelpunkte sich auf einer Seite der gemeinschaftlichen Sehne befinden, liegt im kleineren Abschnitte der Bogen des größeren Kreises zwischen der gemeinschaftlichen Sehne, und dem Bogen des kleineren Kreises.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 90.) der um B mit dem Halbmesser BC beschriebene Kreis der größere, und der um A mit dem Radius AC beschriebene Kreis der kleinere, ferner CD sei ihre gemeinschaftliche Sehne, und beide Mittelpunkte A und B liegen unterhalb dieser Sehne;

2) An dem Durchschnittspunkte C ziehe man für beide Kreise die Tangenten CF und CE (§. 75.), und die beiden Radien CB und CA;

3) Der Winkel ACE, den die Tangens des kleineren Kreises mit dem Radius desselben macht, ist ein rechter Winkel, und deßhalb gleich dem Winkel BCF, den die Tangens des größeren Kreises mit dem Radius BC bildet (§. 74. Zus. I.);

4) Daher ist BCE größer als 90°, und BCD kleiner als 90 Grad (§. 11. Zus. II.), folglich liegt

die Tangens CF zwischen der Tangens CE und der Sehne CD;

5) Es liegt aber auch der Bogen CG zwischen der Tangens CE und der Tangens CF, und der Bogen CH zwischen CF und CD (§. 72. a.), mithin liegt bei C der Bogen CH vom größeren Kreise zwischen dem Bogen CG des kleineren Kreises, und der Sehne CD;

6) Aus den nämlichen Gründen liegt bei D der Bogen DH des größeren Kreises zwischen dem Bogen DG des kleineren Kreises und der Sehne DC;

7) Es liegt also der ganze Bogen CHD vom größeren Kreise zwischen dem Bogen CGD des kleineren Kreises, und der gemeinschaftlichen Sehne CD, indem sich diese beiden Bögen nur in den zwei Punkten C und D schneiden können (§. 58. Zus. II.).

I. Zusatz: Der Bogen CHD vom größeren Kreise (Fig. 90.) ist demnach weniger erhaben, oder er ist flächer, als der Bogen CGD des kleineren Kreises.

II. Zusatz: Nimmt man in der geraden Linie, welche durch die beiden Mittelpunkte dieser Kreise geht, einen beliebigen Punkt K an, und beschreibt man mit KC um K einen Kreis, so geht seine Peripherie auch durch den Punkt D; indem die Zentrallinie die Sehne CD halbirt, und darauf senkrecht steht (§. 111. Zus. IV.), und deßhalb der Halbmesser KC der Linie KD gleich ist (§. 20.).

III. Zusatz: Je größer man den Halbmesser CK nimmt, das ist, je weiter der Mittelpunkt K von der Sehne CD auf der Seite, wo die Mittelpunkte A und B liegen, entfernt ist, desto flächer wird der Bogen des größeren Kreises, desto mehr nähert er sich also seiner Sehne.

IV. Zusatz: Deßwegen kann eine gerade Linie als Bogen eines Kreises betrachtet werden, dessen Halbmesser sehr groß ist, und umgekehrt lassen sich kleine Bögen sehr großer Kreislinien wie ihre Sehnen betrachten, weil die Unterschiede solcher Bögen und Sehnen unmerklich sind.

§. 113.

II. Lehrsatz:

Zwei Kreise, die an einem Punkte ihrer Peripherien eine gemeinschaftliche Tangens haben, sind Berührungskreise.

Beweis:

1) Liegen (Fig. 91.) die Mittelpunkte der beiden um A und B beschriebenen Kreise auf verschiedenen Seiten der Tangens FE, so haben die Kreislinien nach der Annahme den Punkt G gemein, und ein Kreis liegt ganz außerhalb des anderen, weßhalb sie Berührungskreise sind (§. 111. b.);

2) Liegen aber (Fig. 92.) die beiden Mittelpunkte A und B auf der nämlichen Seite der Tangens FE, so errichte man durch den Punkt G, wo die gemeinschaftliche Tangens beide Kreise berührt, das Perpendikel GK auf FE, es geht dieses durch die Mittelpunkte beider Kreise (§. 74. Zus. III.); dann nehme man in der größeren um B beschriebenen Kreislinie einen beliebigen Punkt D an, der auch ein gemeinschaftlicher Punkt beider Peripherien sein soll, und ziehe die geraden Linien BD, AD und DG;

3) Es ist jetzt der Winkel BDG = DGB, weil der Radius BD = BG (§. 14. Zus. IV.), und also das Dreieck BDG gleichschenklicht ist (§. 21. Zus. I.); ferner der Winkel ADG < BDG, also ADG < DGB oder DGA (Arithm. I. §. 10. Nro. 6.), und AG < AD (§. 30.);

4) Es ist daher der Punkt D kein gemeinschaftlicher Punkt mehr für beide Kreislinien, sie haben nur den Punkt G gemein, und jeder andere Punkt D der größeren Kreislinie liegt außerhalb des kleineren Kreises.

I. Zusatz: In zwei Berührungskreisen liegen die beiden Mittelpunkte mit dem Berührungspunkte in einer geraden Linie; indem sich sonst die Kreise durchschneiden würden (§. 111. Zus. VIII.), und also keine Berührungskreise mehr wären (§. 111. b.).

II. Zusatz: Zwei Berührungskreise haben am Be-

rührungspunkte eine gemeinschaftliche Tangens. Denn (Fig. 91 u. 92.) man errichte durch G auf die Tangens FE des um A beschriebenen Kreises in der Figur 91. das Perpendikel HK, und in der Figur 92. das Perpendikel GK, so liegt in diesen beiden Perpendikeln der Mittelpunkt A (§. 74. Zus. III.), und auch das Zentrum B (Zus. I.), folglich steht EE auf beiden Radien AG und GB senkrecht, und ist also eine Tangens beider Kreise (§. 72. a.).

III. Zusatz: Von zwei Berührungskreisen, die auf einer Seite der Tangens liegen, entfernt sich der Bogen des größeren Kreises weniger von der Tangens, als der Bogen des kleineren Kreises.

IV. Zusatz: Die Tangens läßt sich als ein Bogen von einem Kreise mit einem sehr großen Halbmesser betrachten; und umgekehrt läßt sich ein kleiner Bogen einer sehr großen Kreislinie als eine Tangens des Kreises betrachten.

§. 114.

I. Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt zwei Berührungskreise zu beschreiben.

Auflösung:

1) Durch den gegebenen Punkt G ziehe man (Fig. 91.) die gerade Linie HK, oder (Fig. 92.) die gerade Linie GK, und nehme in ihr entweder auf verschiedenen Seiten von G, wie bei Figur 91., oder auf der nämlichen Seite, wie bei Figur 92., zwei beliebige Punkte A und B;

2) Aus A beschreibe man mit dem Halbmesser AG, und aus B mit dem Halbmesser BG Kreise, so sind sie die verlangten Berührungskreise.

Beweis:

Durch G errichte man in der nämlichen Ebene auf GK oder HK das Perpendikel FE, so steht es am Endspunkte G auf beide Radien AG und BG senkrecht, und ist daher eine gemeinschaftliche Tangens für beide Kreise (§. 72. a.), weßhalb die beiden um A und B

beschriebenen Kreise die verlangten Berührungskreise sind (§. 113.).

§. 115.

II. Aufgabe, aus der gegebenen Zentrallinie, und den gegebenen Radien zweier Kreise in einer Ebene für sie auf einer Seite der Zentrallinie eine gemeinschaftliche Tangens zu ziehen.

I. Auflösung, im Falle die Radien gleich sind:

1) Man beschreibe (Fig. 93.) an den beiden Endspunkten der gegebenen Zentrallinie AB mit den gegebenen Radien AG und BH, welche einander gleich sind, die beiden Kreise;

2) Man errichte auf der nämlichen Seite auf die Zentrallinie die Radien AD und BE senkrecht, und verbinde ihre Endspunkte D und E durch die gerade Linie DE, so ist diese die verlangte Tangens.

Beweis:

Nach der Voraussetzung ist AD = BE, und AD und BE stehen auf AB senkrecht, daher ist auch AD zu BE parallel (§. 38. Zus. I.), und AD $\#$ BE, also auch AB $\#$ DE (§. 48. Zus. VIII.), und der Winkel D ist = E = 90° (§. 48. Zus. IV.), folglich ist DE die verlangte gemeinschaftliche Tangens beider Kreise auf der nämlichen Seite der Zentrallinie.

II. Auflösung, wenn die Radien ungleich sind:

1) Man verzeichne (Fig. 94.) die gegebene Zentrallinie AD, und beschreibe an ihren Endspunkten A und D mit den gegebenen ungleichen Radien AB und DH die beiden Kreise;

2) Die Zentrallinie AD halbire man (§. 27.), und beschreibe vom Mittelpunkte C mit dem Halbmesser CA = ½AD den mittleren Kreis;

3) Man nehme die Differenz der beiden Radien, indem man auf dem größeren Radius HD vom Punkte H aus den kleineren Radius AB aufträgt, reicht dieser

bis m, so ist das Stück mD = HD — AB, und deßhalb die Differenz dieser beiden Radien;

4) Die gefundene Differenz Dm trage man von D aus als Sehne des mittleren Kreises auf, und verzeichne dadurch die Sehne DF = Dm;

5) Die Sehne DF verlängere man bis zur Peripherie des um D beschriebenen Kreises, mithin zu G, und ziehe von A auf der nämlichen Seite der Zentrallinie, wo DG liegt, zu DG den Halbmesser AE parallel (§. 39.);

6) Man verbinde endlich die beiden Punkte E und G durch die gerade Linie EG, so ist diese die verlangte gemeinschaftliche Tangens beider Kreise auf der nämlichen Seite der Zentrallinie.

Beweis:

1) Man ziehe von A nach F die Sehne des mittleren Kreises, es ist AFD ein Peripheriewinkel, dessen Schenkel auf den Endspunkten des Diameters aufstehen, und deßhalb ein rechter Winkel (§. 71. Zus. III.), oder AFD = 90°, weßhalb auch sein Nebenwinkel AFG = 90° (§. 9. Zus. III.);

2) Nach Nro. 3 u. 4. der Auflösung ist DF = Dm, und, indem man anstatt DH und AB die gleichen Radien DG und AE setzt, DF ist = DG — AE, ferner FG = DG — DF, mithin ist FG = DG — (DG — AE) = DG — DG + AE = AE (Arithm. III. §. 49.);

3) DG oder FG ist auch nach Nro. 5. der Auflösung parallel zu AE, somit FG ≢ AE, also auch AF ≢ EG, und das Viereck AG ist ein Parallelogramm (§. 48. Zus. VIII.); in diesem ist der Winkel AFG = 90°, also auch E = G = 90° (§. 48. Zus. IV.), und die gerade Linie EG steht an den Endspunkten E und G auf die Radien senkrecht, weßhalb sie auf der nämlichen Seite der Zentrallinie für die beiden Kreise die verlangte gemeinschaftliche Tangens ist (§. 73.).

Zusatz: Auf die nämliche Weise kann man auf der entgegengesetzten Seite der Zentrallinie für beide Kreise mit gleichen oder ungleichen Radien eine gemeinschaftliche Tangens ziehen, von welcher die beiden

Berührungspunkte, im Falle sie vorhin oben waren, auf der unteren Seite liegen.

§. 116.

III. Lehrsatz:

Durch die gegebene Zentrallinie und die beiden Halbmesser ist die Größe und Lage der gemeinschaftlichen Tangens auf jeder Seite der Zentrallinie vollkommen bestimmt, und es läßt sich auf einer Seite nur eine einzige solche Tangens ziehen.

Beweis:

1) Die gemeinschaftliche Tangens (Fig. 93 u. 94.) muß allemal mit der Zentrallinie, und den beiden Radien ein Viereck bilden, und auf den Radien an den Endspunkten senkrecht stehen (§. 74. Zus. I.);

2) Sind die Radien gleich (Fig. 93.), so ist das Viereck AE ein Parallelogramm (§. 48. Zus. VIII.), mithin auch der Winkel A = B = 90° (§. 48. Zus. IV.), und es ist die Lage der beiden Halbmesser AD und BE, somit auch die der Berührungspunkte D und E gegeben, deßhalb ist auch die Lage und Größe der gemeinschaftlichen Tangens DE vollkommen bestimmt, und es läßt sich außer dieser auf der oberen Seite keine andere gemeinschaftliche Tangens beider Kreise ziehen;

3) Sind hingegen die Radien der Kreise ungleich (Fig. 94.), und man zieht die gerade Linie AF, so ist im rechtwinklichten Dreiecke AFD, da der Winkel AFD ein rechter Winkel ist (§. 71. Zus. III.), die Hypotenuse AD, und das Perpendikel DF = DG — FG = DH — AE gegeben, und deßhalb sowohl die Seite AF = EG, als auch der Winkel ADF = ADG vollkommen bestimmt (§. 34. Zus. II.), dadurch ist die Lage des Halbmessers DG zur Zentrallinie DA, somit auch die Lage des Berührungspunktes G gegeben;

4) Endlich ist AE # DG, indem man den Halbmesser AE parallel zu DG gezogen hat, und dadurch ist auch die Lage des Berührungspunktes E bestimmt.

Zwischen den beiden Punkten *D* und E der einen, und den Punkten E und G der anderen Figur ist nur eine gerade Linie möglich (§. 3. Zus. II.); es ist also die Größe und Lage der gemeinschaftlichen Tangens bei Kreisen von gleichen und ungleichen Radien durch die gegebene Zentrallinie und die Radien vollkommen bestimmt, und es läßt sich auf jeder Seite der Zentrallinie nur eine gemeinschaftliche Tangens ziehen.

§. 117.

III. Aufgabe, aus der gegebenen Zentrallinie und den beiden Radien eine gemeinschaftliche Tangens zu ziehen, welche die beiden Kreise auf verschiedenen Seiten der Zentrallinie berührt.

Auflösung:

1) Man verzeichne (Fig. 95.) die gegebene Zentrallinie AE, und an den Endspunkten derselben aus den gegebenen Radien in der nämlichen Ebene die beiden Kreise;

2) Man halbire die Zentrallinie AE, und beschreibe aus ihrem Mittelpunkte C mit dem Halbmesser CA $= \frac{1}{2}$AE den mittleren Kreis;

3) Zu diesem Kreise verzeichne man vom Punkte A aus die Sehne AF, welche die Summe der beiden Radien ausdrückt, somit gleich AG + EK ist, und ziehe auf der anderen Seite der Zentrallinie den Radius EH parallel zu AF;

4) Die Sehne AF, weil sie größer als AG oder A*D* ist, durchschneidet die um A beschriebene Kreislinie im Punkte *D*, man ziehe nun von diesem Punkte zu H die gerade Linie *D*H; so ist diese die verlangte gemeinschaftliche Tangens.

Beweis:

1) Man ziehe von F nach E die gerade Linie FE, so ist AFE $= 90°$, somit ein rechter Winkel (§. 71. Zus. III.);

2) Die Linie AF ist $= AD + DF$, und AF als die Summe beider Radien ist $= AD +$ EH, somit ist $AD + DF = AD +$ EH, und $DF =$ EH;

3)

3) Die Linie EH ist zu AF parallel gezogen worden, mithin ist DF ⧣ EH, also auch DH ⧣ EF, und das Viereck DE ist ein Parallelogramm (§. 48. Zus. VIII.); weßhalb die Winkel bei D und H, indem der Winkel AFE oder DFE = 90°, rechte Winkel sind.

Die gerade Linie DH steht also an den Endspunkten D und H auf beide Radien AD und EH senkrecht, und ist somit für beide Kreise, welche sie auf verschiedenen Seiten der Zentrallinie berührt, eine gemeinschaftliche Tangens.

Zusatz: Wird die Summe der beiden Radien von A aus auf der unteren Seite als Sehne des mittleren Kreises aufgetragen, dann durch E auf der oberen Seite ein Radius des kleineren Kreises zu dieser Sehne parallel gezogen, und zieht man durch die Endspunkte der Radien eine gerade Linie, so ist diese eine gemeinschaftliche Tangens beider Kreise, von welchen sie den ersten unten, und den anderen oben berührt.

§. 118.

IV. Lehrsatz:

Durch die gegebene Zentrallinie und die beiden Halbmesser ist die Tangens vollkommen bestimmt, so daß nur eine Tangens möglich ist, welche den ersten Kreis auf der oberen, und den anderen Kreis auf der unteren Seite, oder umgekehrt, berührt.

Beweis:

1) Weil (Fig. 95.) die Berührungspunkte D und H auf verschiedenen Seiten der Zentrallinie liegen, so muß die gemeinschaftliche Tangens die Zentrallinie in irgend einem Punkte B durchschneiden;

2) Da ferner die Tangens auf die beiden Radien senkrecht stehen muß (§. 74. Zus. I.), so ist der Winkel D = H = 90°, mithin AD ⧣ EH (§. 38. Zus. I.);

3) Verlängert man den ersten Halbmesser AD um DF = EH, und zieht man die gerade Linie EF, so

ist $DF \overset{=}{\#} EH$, mithin auch $EF \overset{=}{\#} DH$ (§. 48. Zus. VIII.), und also der Winkel $F = ADB$ (§. 41.) = 90 Grad (Nro. 2.);

4) Im rechtwinklichten Dreiecke AFE ist die Hypotenuse AE als die Zentrallinie, und der Kathet $AF = AD + DF = AD + EK$ als die Summe der beiden Radien gegeben, und dadurch das Dreieck AFE vollkommen bestimmt (§. 34. Zus. II.), weßhalb auch die Seite FE und der Winkel FAE oder DAE, mithin die Lage des Halbmessers AD zur Zentrallinie, und also auch der Berührungspunkt D gegeben ist;

5) Da nämlich $EH \# AD$ (Nro. 2.), so ist im ersten Kreise die Lage des Halbmessers EH zur Zentrallinie, folglich auch der Berührungspunkt H, und durch die beiden Berührungspunkte D und H ist die Tangens DH selbst vollkommen bestimmt.

II. Abschnitt.

Von Verhältnissen der Kreislinien.

---

§. 119.

Eine in dem Kreise, und eine um den Kreis beschriebene Figur.

a) Wenn alle Seiten einer Figur Sehnen eines Kreises sind, so sagt man, die Figur sei in dem Kreise beschrieben, oder der Kreis sei um sie beschrieben; so z. B. ist (Fig. 96.) das Dreieck ABD, dann (Fig. 98.) das Viereck ABDE, und (Fig. 100.) das Vieleck abdefg in dem Kreise beschrieben, und der Kreis ist um sie beschrieben.

b) Wenn aber alle Seiten der Figur Tangenten eines Kreises sind, so heißt die Figur um den Kreis beschrieben, und der Kreis in die Figur beschrieben; so z. B. ist (Fig. 97.) das Dreieck BAF

und (Fig. 100.) das Vieleck ABDEFG um den Kreis beschrieben, und der Kreis ist in sie beschrieben.

c) Die in den Kreis beschriebene Figur wird auch eine innere, und die um den Kreis verzeichnete Figur eine äußere genannt; so ist (Fig. 100.) das Vieleck abdefg ein inneres, und ABDEFG ist ein äußeres Vieleck.

§. 120.

I. Aufgabe, um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung:

Man beschreibe (Fig. 96.) eine Kreislinie, welche durch die drei Ecke eines Dreieckes ABD geht (§. 58.); dadurch werden alle Seiten der Figur Sehnen des Kreises, und man hat einen Kreis um das Dreieck verzeichnet (§. 119. a.).

§. 121.

II. Aufgabe, in ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung:

1) Man theile (Fig. 97.) zwei Winkel B und F, die an einer Seite des Dreieckes BAF anliegen, durch die geraden Linien BC und FC in zwei gleiche Theile (§. 26.);

2) Aus dem Punkte C, in welchem sich diese Linien durchschneiden, fälle man auf eine Seite des Dreieckes ein Perpendikel (§. 33.), etwa CG auf BF, und beschreibe damit aus C in der nämlichen Ebene einen Kreis, so ist dieser der verlangte, in das Dreieck beschriebene Kreis.

Beweis:

1) Zwei Winkel eines Dreieckes halten weniger als 180 Grad (§. 28. Zus. II.), daher ist $B + F < 180^\circ$, mithin auch $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}F < 180^\circ$, oder $p + u < 180^\circ$, und die Linien BC und FC durchschneiden

sich also in einem Punkte C auf der Seite dieser Winkel (§. 40.);

2) Man ziehe auf die beiden übrigen Seiten BA und AF vom Punkte C die Perpendikel CE und CD, so ist

3) der Winkel $p = r$, dann $G = E = 90^\circ$, und $BC = BC$, also $\triangle BCG \cong \triangle BCE$ (§. 44. Zus. II.), und $CG = CE$ (§. 18. Zus. IV.);

4) Eben so ist der Winkel $n = m$, dann $G = D = 90^\circ$, und $CF = CF$, also $\triangle GCF \cong \triangle CDF$, und $CG = CD$;

5) Es sind demnach die Perpendikel CG, CD und CE Radien des Kreises, und auf ihnen stehen die Seiten des Dreieckes senkrecht, sind also Tangenten des Kreises (§. 73.), und der Kreis ist in das Dreieck beschrieben.

§. 122.

I. Lehrsatz:

Wenn man eine Kreislinie in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilet, und durch alle Theilungspunkte der Ordnung nach Sehnen zieht, so erhält man ein in den Kreis beschriebenes Vieleck von so vielen Seiten, als Theile die Kreislinie hat.

Auflösung:

1) Man theile (Fig. 100.) die Kreislinie in n gleiche Theile, und ziehe der Ordnung nach zu den Theilungspunkten die Sehnen ab, bd, de u. s. f., so erhält die Figur so viele Seiten, als die Kreislinie Theile hat, somit n Seiten;

2) Da nach der Annahme alle Bögen gleich sind, so sind auch alle Sehnen (§. 61. Zus. III.), mithin alle Seiten dieser Figur gleich;

3) Jeder Winkel dieser Figur ist ein Peripheriewinkel, und steht auf $n - 2$ solchen Bögen auf, mithin sind alle Winkel einander gleich (§. 71. Zus. II.), und die Figur ist regulär (§. 13. b.);

4) Weil endlich alle Seiten der Figur Sehnen des Kreises sind, so bilden sie ein in den Kreis beschriebenes reguläres n Eck (119. a.).

Zusatz: Wenn ein Bogen der nte Theil der Kreislinie ist, so ist seine Sehne die Seite des im Kreise beschriebenen regulären n Eckes (Lehrs.), und gibt deßhalb, n mal an der Peripherie des Kreises aufgetragen, das reguläre n Eck.

§. 123.

III. Aufgabe, ein reguläres Viereck in den Kreis zu beschreiben.

Auflösung:

Man ziehe (Fig. 98.) zwei auf einander senkrecht stehende Durchmesser AD und BE, und verbinde ihre Endspunkte durch die Sehnen AB, BD, DE und EA, und man erhält das verlangte, in den Kreis beschriebene reguläre Viereck.

Beweis:

Durch die zwei Durchmesser, welche sich im Zentrum C senkrecht schneiden, wird die Kreislinie in vier Quadranten getheilt (§. 62. Zus. II.), weßhalb die vier Sehnen das verlangte Viereck geben (§. 122.).

Zusatz: Wenn man die Seiten des Viereckes durch Perpendikel halbirt, so werden auch die Bögen halbirt (§. 60. Zus. V.), und es wird die Kreislinie in acht gleiche Theile getheilt; daher erhält man ein in den Kreis beschriebenes reguläres Achteck, wenn man zu diesen acht Bögen die entsprechenden Sehnen zieht. Auf eine ähnliche Weise läßt sich aus dem Achtecke das reguläre Sechszehneck, aus diesem das reguläre Zweiunddreißigeck, und so fortgesetzt, verzeichnen.

Anmerkung: 1) Es ist zureichend, wenn man (Fig. 98.) durch das Perpendikel CF nur den Bogen AE halbirt, und die Hälfte Am auf den übrigen Bögen aufträgt, und dadurch An = Bp = Dq = Am macht, um aus dem regulären Vierecke das reguläre Achteck zu verzeichnen. Auf eine ähnliche Weise kann man dann aus dem regulären Achtecke das reguläre Sechszehneck ꝛc. verzeichnen.

2) Die geometrische Reihe 4, 8, 16, 32, 64...... (Arithm. IV. §. 45.), oder 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 ...... gibt die Anzahl der Ecke der regulären Figuren an, die man auf diese Weise in den Kreis verzeichnen kann.

§. 124.

IV. Aufgabe, in den Kreis ein reguläres Sechseck zu beschreiben.

Auflösung:

Man trage (Fig. 99.) den Radius AC sechsmal auf der Peripherie des Kreises auf, und ziehe zu den Durchschnittspunkten die entsprechenden sechs Sehnen (§. 65. Zus.); man erhält dadurch ein in den Kreis beschriebenes reguläres Sechseck (§. 122.).

I. Zusatz: Zieht man (Fig. 99.) die Sehnen DA, DF und AF zu den doppelten Bögen des Sechseckes, so wird ein reguläres Dreieck ADF in den Kreis beschrieben (§. 122.).

II. Zusatz: Theilet man durch Perpendikel (Fig. 99.) alle Seiten, mithin auch alle Bögen vom regulären Sechsecke in zwei gleiche Theile, und zieht man dazu die Sehnen, so erhält man das reguläre Zwölfeck, aus diesem auf eine ähnliche Weise das Vierundzwanzigeck, und so fortgesetzt.

III. Zusatz: Ueber eine gegebene gerade Linie ag (Fig. 100.) wird ein reguläres Sechseck verzeichnet, wenn man über diese Linie ein gleichseitiges Dreieck aCg verzeichnet (§. 19. Zus. II.), aus C mit dem Halbmesser Ca = ag einen Kreis beschreibt, den Radius dieses Kreises sechsmal an der Peripherie aufträgt, und die Durchschnittspunkte durch sechs Sehnen verbindet (§. 65. Zus.)

Anmerkung: 1) Was in der ersten Anmerkung des vorigen §. bemerkt wurde, kann auch hier bei der Verzeichnung des regulären Zwölfeckes aus dem regulären Sechsecke &c. benützt werden; hat man nämlich durch ein Perpendikel den Sextanten halbirt, so darf man seine Hälfte nur auf den übrigen fünf Kreisbögen, um auch sie zu halbiren, auftragen, und die Sehnen ziehen, damit man das Zwölfeck erhält, was eben so bei der Verzeichnung der fortgesetzten regulären Figuren geschehen kann.

2) Die geometrische Reihe 3, 6, 12, 24, 48 ..... oder 3, 3×2, 3×2^2, 3×2^3, 3×2^4 ..... gibt die Anzahl der Ecke der regulären Figuren an, die man auf die angezeigte Weise in den Kreis verzeichnen kann.

3) Aus den in dem Zusatze des §. 123., und im vorstehenden II. Zusatze angegebenen Auflösungen ersieht man die Verfahrungsweise, nach der man, wenn was immer für eine reguläre Figur in den Kreis beschrieben ist, ein reguläres Vieleck von zweimal so viel Seiten in den Kreis verzeichnen kann.

§. 125.

V. Aufgabe, um einen Kreis, in welchem ein reguläres Vieleck beschrieben ist, ein reguläres Vieleck mit eben so vielen Seiten zu beschreiben.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 100.) in den Kreis das reguläre Sechseck abdefg beschrieben, und man soll um den Kreis ein reguläres Sechseck beschreiben;

2) Man ziehe den Radius CH auf ag senkrecht (33.), und am Endspunkte H die Tangens (§. 75.);

3) Zum Ecke a der inneren Figur ziehe man den Radius Ca, und zum Ecke g den Radius Cg, und verlängere beide, bis sie die Tangens in A und G schneiden;

4) Man ziehe zu allen übrigen Ecken des inneren Vieleckes Radien, und verlängere sie so, daß sie dem verlängerten Radius CA gleich werden; das ist, man mache CB = CD = CE = CF = CA;

5) Die Punkte A, B, D, E, F und G verbinde man der Ordnung nach durch gerade Linien, so ist die Figur ABDEFG das verlangte, um den Kreis beschriebene reguläre Vieleck.

Beweis:

1) Die äußere Figur bekommt offenbar so viele Seiten, als Zentriwinkel da sind, mithin so viele Seiten, als das innere Vieleck hat;

2) Die Sehne ag ist zu AG parallel, da CH auf ag nach Nro. 2. der Auflösung, und zugleich als Radius auf AG senkrecht steht (§. 38. Zus. I.), und die

beiden Radien CA und Cg schneiden verlängert in den Punkten A und G die Tangens (§. 40.);

3) Der Winkel aCh oder ACH ist gleich dem Winkel hCg oder HCG (§. 36. Zus. II.), ferner ist der Winkel AHC = GHC = 90° (§. 74. Zus. I.), und CH = CH, also ist das Dreieck AHC ≅ △ HCG (§. 22.), und AC = CG (§. 18. Zus. IV.);

4) Die innere Figur ist nach der Voraussetzung regulär, und deßhalb sind alle ihre Seiten gleich; diese sind, da die Figur in den Kreis beschrieben ist, Sehnen des Kreises, weßhalb alle Zentriwinkel aCg oder ACG, dann aCb oder ACB u. s. f., einander gleich sind (§. 60. Zus. III.);

5) Da überdieß in den Dreiecken ACG, ACB BCD ꝛc. die Seiten AC, CG, BC ꝛc. einander gleich sind, so sind die Dreiecke ACG, ACB ꝛc. kongruent (§. 20.) und alle Seiten der äußeren Figur AG, AB ꝛc. sind einander gleich;

6) Die Radien ca, cb ꝛc. sind einander gleich (§. 14. Zus. IV.), gleichwie es die Seiten CA, CB ꝛc. sind, daher verhält sich Ca : AC = Cb : CB = Cd : CD, u. s. w., folglich ist ab # AB, dann bd # BD, u. s. f. (§ 83.), und der Vieleckswinkel gab = GAB (§. 41.), dann abd = ABD ꝛc., ferner sind die Winkel des inneren Vieleckes einander gleich, daher sind es auch alle Winkel der äußeren Figur;

7) Endlich sind die kongruenten Dreiecke ACB, BCD ꝛc. wegen der gleichen Seiten AC, BC, DC ꝛc. gleichschenklicht; zieht man nun, wie im Dreiecke ACG, vom Zentrum C auf alle übrigen Seiten der äußeren Figur die Perpendikel CK, CL ꝛc. so theilet jedes das entsprechende Dreieck in zwei kongruente rechtwinklichte Dreiecke (§. 36. Zus. II.), weßhalb auch die rechtwinklichten Dreiecke ACH, BCK, LDC ꝛc. kongruent sind, und jedes der gezogenen Perpendikel ist dem Radius CH gleich (§. 18. Zus. IV.);

8) Es stehen also alle Seiten der äußeren Figur auf die Radien CH, CK, CL ꝛc. an ihren Endspunkten senkrecht, und sind deßhalb Tangenten des Kreises.

Daher hat man auf die angezeigte Weise um den Kreis ein Vieleck beschrieben, welches mit dem inneren

gleichnamig (§. 13. c.) und ebenfalls regulär, und deßhalb das verlangte Vieleck ist.

§. 126.

II. Lehrsatz:

Wenn man in einer regulären Figur zwei Winkel, die an einer Seite anliegen, durch gerade Linien halbirt, so durchschneiden sich diese innerhalb der Figur in einem Punkte, der von allen Ecken und von allen Seiten der Figur gleich weit entfernt ist.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 98.) in den Kreis das reguläre Viereck ABDE beschrieben, und man halbire an der Seite AE durch die Linien AC und EC die beiden anliegenden Vieleckswinkel BAE und AED (§. 26.);

2) Bei den regulären Figuren sind alle Winkel, indem sie einander gleich sind, hohl (§. 9. b.), und deswegen

$$\begin{array}{ll} & BAE < 2R \\ \text{und} & AED < 2R \\ \hline \text{also} & BAE + AED < 4R, \\ \text{und} & \tfrac{1}{2}BAE + \tfrac{1}{2}AED < 2R, \\ \text{oder} & r + s < 180^\circ, \end{array}$$

weßwegen die Linien AC und EC in einem Punkte C auf der Seite dieser Winkel zusammen stossen (§. 40.);

3) Nach Nro. 1. hat man die Polygonswinkel A und E halbirt, weßhalb $\tfrac{1}{2}BAE = \tfrac{1}{2}AED$, oder $r = s$, mithin $AC = EC$ (§. 23.), ferner $AE = ED$, dann $EC = EC$, und $s = t$, also ist $\triangle ACE \cong \triangle ECD$, folglich $CD = AC = EC$, und der Winkel $s = x = \tfrac{1}{2}AED = \tfrac{1}{2}EDB$;

4) Auf eine ähnliche Weise wird für die übrigen Ecke bewiesen, daß CB u. s. w. gleich CA ist, und deßhalb der Durchschnittspunkt C von allen Ecken der regulären Figur gleich weit absteht;

5) Man ziehe aus C auf alle Seiten Perpendikel,

so ist EH = ½AE, und EL = ½ED (§. 36. Zus. II.), somit EH = EL, ferner EC = EC, also △ HCE ≌ △ ECL (§. 34. Zusatz II.) und CH = CL (. §. 18. Zus. IV.); aus den nämlichen Gründen folgt, daß CH = CL = CK, u. s. w., mithin, daß auch alle Entfernungen der Seiten vom Punkte C, oder alle Perpendikel gleich groß sind.

§. 127.

VI. Aufgabe, um, und in jede reguläre Figur einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung:

a) Will man um eine reguläre Figur einen Kreis beschreiben, so halbire man durch gerade Linien zwei an einer Seite anliegende Winkel, etwa (Fig. 101.) die beiden Polygonswinkel A und G, und aus dem Punkte C, in dem sich die Linien AC und GC schneiden, ziehe man zum Ecke A die gerade Linie CA, und beschreibe damit einen Kreis, so geht solcher durch alle Ecke des Vieleckes (§. 126.), und ist deßwegen um das Vieleck beschrieben (§. 119. a.).

b) Will man in die reguläre Figur einen Kreis beschreiben, so halbire man (Fig. 101.), wie vorhin bei a., zwei an einer Seite anliegende Winkel, und vom Punkte C, in welchem sich die geraden Linien AC und CG schneiden, ziehe man auf AG das Perpendikel CH; damit beschreibe man einen Kreis, so ist dieser in das Vieleck beschrieben.

Denn zieht man aus C auf alle übrigen Seiten Perpendikel, so sind sie dem Radius CH gleich (§. 126.), mithin stehen alle Seiten des Vieleckes auf den Endspunkten der Radien senkrecht, sind also Tangenten des Kreises (§. 73.), folglich ist der Kreis in die reguläre Figur beschrieben (§. 119. b.).

1. Zusatz: Wenn in, oder um den Kreis ein reguläres Vieleck beschrieben ist, so halbirt der Radius des Kreises jeden Polygonswinkel. Denn eine gerade Linie, welche (Fig. 101.) den Winkel A halbirt, geht durch das Zentrum C (§. 126.); zwischen den zwei Punk-

ten A und C ist aber nur eine einzige gerade Linie möglich (§. 3. Zus. II.), daher halbirt jeder Radius den Polygonswinkel, zu dessen Scheitel er gezogen wird.

II. Zusatz: Wenn man in einem regulären Vielecke, das in, oder um den Kreis beschrieben ist, aus des Kreises Mittelpunkte an alle Ecke gerade Linien zieht, so erhält man eben so viele kongruente Dreiecke; denn (Fig. 98.) da AC = CE = CD, und AE = ED, so ist △ ACE ≌ △ ECD (§. 24.), was sich aus den nämlichen Gründen eben so in Absicht auf die übrigen Dreiecke verhält.

III. Zusatz: Der Zentriwinkel eines regulären Vieleckes von n Seiten ist $= \frac{360^\circ}{n}$. Denn (Fig. 98.) alle Winkel um C zusammen halten 360° (§. 11. Zus. IV.); nun gibt es bei einem Vielecke von n Seiten n solche, einander gleiche Winkel (Zus. II.), es ist also einer davon, etwa ACE $= \frac{360^\circ}{n}$.

Daher ist z. B. der Zentriwinkel im regulären Fünfecke $= \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, im regulären Sechsecke $= \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, im regulären Siebenecke $= \frac{360^\circ}{7}$ $= 51^\circ\ 25'\ 42\frac{6}{7}''$, mithin beinahe $= 51^\circ\ 25'\ 43''$, u. s. f.

IV. Zusatz: Man findet den Polygonswinkel, wenn man den Zentriwinkel von 180° abzieht; daher ist derselbe nach dem III. Zusatze $= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ $= \frac{n \cdot 180^\circ - 360^\circ}{n}$ (Arithmetik. III. §. 67. Lehrs. II. Zus.) $= \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ (Arithm. III. §. 87. IV.).

Denn (Fig. 98.) im Dreiecke ACE ist die Summe der Winkel $r + s + C = 180^\circ$ (§. 43.), und $s = t$ (§. 127. Zus. I.), mithin $s + t + C = 180^\circ$, und $s + t$,

oder der Polygonswinkel AED $= 180° - C = 180° - \frac{360°}{n}$.

Daher ist z. B. der Polygonswinkel im regulären Fünfecke $= \frac{180°(5-2)}{5} = \frac{180° \times 3}{5} = 108°$ im regulären Sechsecke $= \frac{180°(6-2)}{6} = \frac{180° \times 4}{6} = 120°$, im regulären Siebenecke $= \frac{180°(7-2)}{7} = \frac{180° \times 5}{7} = 128\frac{4}{7}° = 128°\ 34'\ 17\frac{1}{7}''$.

Anmerkung: 1) In Absicht auf den IV. Zusatz sehe man im §. 53. den I. Zusatz nach, in welchem ebenfalls die Regel angegeben ist, nach welcher man den Polygonswinkel des regulären Vieleckes, wenn man die Anzahl der Seiten weiß, berechnen kann.

2) Will man mechanisch (§. 64. Anm. 1.) mittels eines Winkelmessers reguläre Vielecke mit wie immer vielen Seiten beschreiben, so verzeichnet man einen Kreis, und darin, wenn das Vieleck n Seiten hat, einen Zentriwinkel, welcher der nte Theil von 360 Grad, oder $= \frac{360°}{n}$ ist (§. 127. Zus. III.), dann ist sein Bogen der nte Theil der Peripherie (§. 60. Zus. I.) trägt man nun die Sehne dieses Bogens auf der Kreislinie n mal auf, so erhält man das verlangte n Eck (§. 122.).

3) Weil nach dem IV. Zusatze des §. 127. der Polygonswinkel $= 180° - \frac{360°}{n}$, und deßhalb seine Hälfte $= 90° - \frac{180°}{n}$ ist, so kann man (Fig. 101.) über eine gerade Linie AG ein reguläres n Eck verzeichnen, wenn man an den Endspunkten dieser Linien zwei Winkel CAG und CGA verzeichnet, von welchen jeder $= 90° - \frac{180°}{n}$, und vom Durchschnittspunkte C der beiden Schenkel mit dem Radius CA einen Kreis beschreibt, und die Linie AG als Sehne des Kreises n mal aufträgt (§. 122.).

Denn es ist CAG + CGA $= 90° - \frac{180°}{n} + 90°$

$-\frac{180^\circ}{n}$, oder $180^\circ - \frac{360^\circ}{n} < 180^\circ$, und die Linien AC und CG stossen im Punkte C zusammen (§. 40.); ferner ist (§. 43. Zus. I.) der Dreieckswinkel ACG $= 180^\circ - (CAG + CGA) = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right)$ $= \frac{360^\circ}{n}$, und deßhalb ist der Kreisbogen AG der nte Theil der Peripherie.

§. 128.

III. Lehrsatz:

In gleichnamigen regulären Figuren verhalten sich die Perimeter, wie die Halbmesser oder Durchmesser jener Kreise, welche um sie beschrieben sind.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 101.) um die Punkte C und c Kreise, und in sie zwei gleichnamige reguläre Figuren beschrieben, und man ziehe aus C die Radien CA und CG, und aus c die Radien ca und cg;

2) Bezeichnet überhaupt n die Anzahl der Seiten, die jede Figur hat, so ist die Hälfte des Polygonswinkels BAG, somit $CAG = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$ (§. 127. Zus. I.), und im anderen Kreise ist $cag = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$ (§. 127. Anm. 3.), mithin CAG = cag (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.), ferner ist der Zentriwinkel ACG $= \frac{360^\circ}{n}$, und $acg = \frac{360^\circ}{n}$ (§. 127. Zus. III.), folglich ist auch ACG = acg, und $\triangle ACG \backsim \triangle acg$; deßwegen verhält sich (§. 92. Zus.)

AC : ca = AG : ag,
und AG : ag = PERJM. : perim. (§. 101.)

also PERJM. : perim. = CA : ca = 2CA : 2ca;

3) Drückt man CA und ca als die Radien der Kreise durch R und r, und die doppelten Halbmesser 2CA und 2ca, oder die Durchmesser durch D und d aus, so verhält sich

$$\text{PERIM.} : \text{perim.} = R : r = D : d.$$

Es sind also die Perimeter gleichnamiger regulärer Figuren mit den Radien oder Durchmessern der Kreise, welche um sie beschrieben sind, gerade proportionirt.

§. 129.

IV. Lehrsatz:

Im Kreise kommt die Sehne ihrem Bogen um so näher, je kleiner sie ist.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 88.) die gerade Linie AB die Sehne des Bogens AEB, und durch den senkrechten Radius CE sei die Sehne und der Bogen halbirt (§. 60. Zus. V.), so daß $AD = \frac{1}{2}AB$, und arc. $AE = \frac{1}{2}$arc. AEB;

2) Die Sehne AB bezeichne man durch c, und den Bogen AEB durch a, es ist $AD = \frac{1}{2}c$, und arc. $AE = \frac{1}{2}a$; ferner die Sehne AE des halben Bogens drücke man aus durch b, mithin setze man $AE = b$;

3) Zwischen zwei Punkten ist die gerade Linie allemal die kürzeste (§. 3. Zus. II.), daher ist arc. AEB $>$ AB, und arc. AE $>$ AE, oder $a > c$, und $\frac{1}{2}a > b$, mithin $a > 2b$;

4) Man subtrahire c von a, und 2b von a, und drücke den ersten Rest durch d, und den zweiten durch f aus, es ist $a - c = d$, und $a - 2b = f$, somit $d + c = a$, und $a = 2b + f$ (Arithm. III. §. 96. Zus. I.), weßhalb $c + d = 2b + f$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.);

5) Die Sehne AE ist größer als AD, gleichwie EB $>$ DB ist (§. 30. Zus. IV.), oder $b > \frac{1}{2}c$, also $2b > c$, oder $c < 2b$.

Nach Nro. 4. ist $c + d = 2b + f$,
und $c < 2b$,

also $d > f$ (Arithm. I. §. 34. III.)

Es drückt aber d den Unterschied zwischen dem Bogen a oder AEB, und der Sehne c oder AB aus, und f bezeichnet den Unterschied zwischen dem Bogen a oder AEB und 2b oder den beiden Sehnen AE und EB des halben Bogens AE (Nro. 4.); ferner ist arc. AE > AE, und arc. EB > EB, also arc. AE + arc. EB > AE + EB, oder arc. AEB > AE + EB. Daher sind die beiden Sehnen des halben Bogens zusammen weniger vom ganzen Bogen unterschieden, als die ganze Sehne, und es nähert sich die Sehne ihrem Bogen um so mehr, je kleiner sie ist.

I. Zusatz: Der Perimeter eines in den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes ist kleiner, als die Peripherie des Kreises. Denn jede Seite des Vieleckes ist als Sehne des Kreises kleiner als ihr Bogen (§. 3. Zus. II.); so viele Seiten das Vieleck hat, in eben so viele Bögen ist die Peripherie getheilt; daher ist die Summe aller Kreisbögen größer als die Summe aller Seiten (Arithm. I. §. 25. III.), das ist, der Perimeter des in den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes ist immer kleiner, als die Peripherie des Kreises.

II. Zusatz: Der Perimeter des in den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes kommt der Peripherie des Kreises um so näher, je mehrere Seiten das Vieleck hat. Denn die Seiten werden desto kleiner, je mehrere Seiten das reguläre Vieleck hat, daher nähern sie sich ihren Bögen um so mehr, mithin kommt auch der Perimeter der Krieslinie um so näher.

Hat man (Fig. 99.) in den Kreis das reguläre Sechseck beschrieben, und verzeichnet man daraus in dem Kreise das reguläre Zwölfeck, so ist Am + mG > AG (§. 3. Zus. II.), dann arc. Am > Am, und arc. mG > mG, daher arc. Am + arc. mG, oder arc. AmG > Am + mG, und dieses verhält sich eben so in Absicht auf die übrigen Bögen und Sehnen, woraus offenbar folgt, daß der Perimeter des regulären Zwölfeckes größer ist, als der Perimeter des regulären Sechseckes, indeß ist es aber immer noch kleiner als die Peripherie des Kreises (Zus. I.); das ist, der Perimeter eines in den Kreis beschriebenen re-

gulären Vieleckes kommt der Peripherie des Kreises um so näher, je mehrere Seiten das Vieleck hat.

§. 130.

V. Lehrsatz:

Sehr kleine Sehnen sind von ihren Bögen unmerklich unterschieden, und lassen sich deßhalb wie ihre Bögen betrachten.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 88.) auf der Sehne AB eines Kreisbogens AEB, der kleiner ist als die halbe Peripherie des Kreises, der Durchmesser EF senkrecht gezogen, so verhält sich (§. 102.)

$$ED : DA = DA : DF;$$

2) Der Durchmesser EF halbirt die Sehne AB, weßhalb $DA = \frac{1}{2}AB$ (§. 56.), und AB ist kleiner als EF (§. 14. Zus. VII.), folglich auch $\frac{1}{2}AB < \frac{1}{2}EF$, oder $AD < CF$, mithin um so mehr $AD < DF$;

3) Je mehr sich der Durchschnittspunkt D vom Zentrum C entfernt, und somit dem Punkte E sich nähert, desto kleiner wird die Sehne *AB* (§. 67.), und der Bogen AEB, mithin auch die halbe Sehne *A*D, und desto größer wird dagegen DF;

4) Nun kann man den Punkt D so nahe an E setzen, als man will, mithin AD, folglich auch den Bogen so klein, als man will, und selbst gleich Null setzen;

5) Wie sich D*A* zu DF verhält, so verhält sich ED zu D*A* (Nro. 1.) daher ist, weil in der geometrischen Proportion die Verhältnisse einander gleich sind (Arithm. IV. §. 35. Nro. 1.), auch ED in Absicht auf D*A* sehr klein, wenn es AD gegen DF ist;

6) Ist demnach die Linie DE, welche die größte Entfernung des Bogens von der Sehne angibt, sehr klein, so ist der Unterschied zwischen der Sehne und dem Bogen unmerklich, die Sehne fällt mit ihrem Bogen zusammen, und man sagt aus diesem Grunde, sehr kleine Sehnen lassen sich wie ihre Bögen betrachten.

I. Zusatz: Die Kreislinie läßt sich betrachten

als

als der Perimeter eines in den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes von sehr vielen, und deßwegen auch sehr kleinen Seiten.

Denn der Perimeter des regulären Vieleckes ist die Summe aller kleinen Seiten oder Kreissehnen, mithin Perim. $=\infty$ chord. (Arithm. I. §. 10. Nro. 2.), und die Peripherie des Kreises ist der Inbegriff aller kleinen gleichen Bögen, oder Periph. $=\infty$ arc., daher verhält sich (§. 9. Nro. 6.)

Periph. : Perim. $=\infty$ arc. : ∞ chord.
$=$ arc. : chord. (Arithm. IV. §. 41.).

Nun ist der Unterschied zwischen der sehr kleinen Sehne und ihrem Bogen unmerklich, daher läßt sich auch die Peripherie des Kreises als der Perimeter des in den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes von sehr vielen und sehr kleinen Seiten betrachten.

II. Zusatz: Der Kreis selbst läßt sich als ein reguläres Vieleck von sehr vielen Seiten betrachten, gleichwie man die Peripherie als den Perimeter eines solchen Vieleckes annehmen kann.

III. Zusatz: Alle Kreise sind einander ähnlich, da man die Kreise als reguläre Vielecke von sehr vielen und sehr kleinen Seiten, mithin als gleichnamige reguläre Vielecke betrachten kann (§. 90. Zus. IV.)

IV. Zusatz: In allen Kreisen verhalten sich die Peripherien, wie ihre Radien oder Durchmesser (§. 128.).

Bezeichnet man die Peripherien zweier Kreise durch P und p, ihre Radien durch R und r, und ihre Durchmesser durch D und d, so verhält sich

$P : p = R : r$,
und $P : p = D : d$.

V. Zusatz: Das Verhältniß des Diameters zur Peripherie ist in allen Kreisen einerlei; ist demnach das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie in einem Kreise bestimmt, so gilt dasselbe für alle Kreise. Denn nach dem II. Zusatze verhält sich

$P : p = D : d$,
dann $P : D = p : d$ }
und $D : P = d : p$ } (Arithm. IV. §. 38.).

Anmerkung: Man nennt den Kreis auch ein unendli-

ches reguläres Vieleck, und betrachtet dann die krumme Kreislinie als eine geradgebrochene Linie (§. 3. c.), welche aus sehr vielen, unter sich gleichen Theilen besteht, die man sich so klein denkt, daß die Sehnen von ihren Bögen sehr wenig unterschieden sind, und deßhalb beide wie eine Größe ohne merkliche Abweichung angenommen werden können. Nur in diesem Sinne werde ich in der Folge der Kürze wegen öfters sagen, unendlich kleine Sehnen seien von ihren Bögen unmerklich unterschieden, dann die Kreislinie lasse sich als der Perimeter eines in den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes von unendlich vielen Seiten, und deßhalb sich der Kreis selbst als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen und kleinen Seiten betrachten.

§. 131.

VII. Aufgabe, aus dem Radius des Kreises, und dem Perimeter eines in den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes den Perimeter einer um den Kreis beschriebenen regulären Figur von eben so viel Seiten zu berechnen.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 100.) der Radius AC, und der Perimeter des in den Kreis beschriebenen regulären Sechseckes bekannt, und man soll den Perimeter des um den Kreis beschriebenen regulären Sechseckes finden;

2) Man suche aus der Seite ag als der Sehne des Kreises, und aus dem Radius aC die Entfernung der Sehne vom Zentrum (108.), welche das Perpendikel Ch ausdrückt (§. 33. Zus. II.);

3) Zu diesem Perpendikel Ch, dann zum Radius aC, und zum Perimeter des inneren Vieleckes suche man die vierte geometrische Proportionallinie (§. 88.), so ist diese der verlangte Perimeter der äußeren Figur.

Beweis:

1) Man ziehe den Radius CH auf AG senkrecht, und durch H die Linie AG zu ag parallel, so ist AG die Seite des um den Kreis beschriebenen regulären Sechseckes (§. 125.);

2) Weil CH auch auf ag senkrecht steht, und

$CA = CG$ ist, so ist $AH = \frac{1}{2}AG$, gleichwie $ah = \frac{1}{2}ag$ ist (§. 36. Zus. II.);

3) Die Linie ag ist parallel zu AG (§. 38. Zus. I.), daher verhält sich (§. 82.)

$$Ch : CH = ah : AH = \tfrac{1}{2}ag : \tfrac{1}{2}AG$$

und $Ch : CH = ag : AG$ (Arithm. IV. §. 41.)

ferner $ag : AG = \text{perim.} : \text{PERIM.}$ (§. 101.)

also $Ch : CH = \text{perim.} : \text{PERIM.}$ (Arithm. IV. §. 43.).

§. 132.

IV. Lehrsatz:

Das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie des Kreises ist beinahe = 1 : 3,1415.

Beweis:

1) Man denke sich ein in den Kreis beschriebens reguläres Sechseck (§. 124.), und setze den Halbmesser des Kreises = 1, so ist (§. 13. b.) jede Seite des Sechseckes = 1, und der Perimeter = 6;

2) Der Perimeter des Sechseckes weicht von der Kreislinie noch zu viel ab, daher denke man sich in den Kreis das reguläre Zwölfeck beschrieben (§. 124. Zus. II.), und berechne aus dem Radius = 1, und aus der Seite des Sechseckes = 1 nach dem II. Zusatze des §. 109. die Seite des regulären Zwölfeckes; diese ist = 0,5176380 ...., und deßhalb der Perimeter des regulären Zwölfeckes = 0,5176380 .... × 12 = 6,2116560 .....;

3) Auf eine ähnliche Weise berechnet man den Perimeter des Vierundzwanzigeckes, des Achtundvierzigeckes, u. s. f.

4) Setzet man dieses Verfahren immer fort, so erhält man den Perimeter des in den Kreis beschriebenen regulären 768 Eckes (§. 124. Anm. 2.); dieser ist = 6,2830 ...., mithin beinahe = 6,2830;

5) Der Perimeter eines solchen Vieleckes kommt der Kreislinie sehr nahe (§. 129. Zus. II.), und kann daher ohne merklichen Fehler als die Peripherie des um das Vieleck beschriebenen Kreises angenommen werden.

Drückt man nun den Radius des Kreises durch r, den doppelten Radius oder 2r durch d, und den Perimeter des Vieleckes oder die Peripherie des Kreises durch p aus, so ist $r = 1$, dann $2r$ oder $d = 2$, und p beinahe $= 6,2830$; weßhalb

$$\left.\begin{array}{rl} r : p = 1 : 6,2830\ldots \\ \text{dann } 2r : p = 2 : 6,2830\ldots \\ d : p = 1 : 3,1415\ldots \end{array}\right\} \text{(Arithm. IV. §. 41.)}$$

Das heißt, wenn z. B. der Durchmesser des Kreises 1 Schuh hat, so beträgt die Peripherie desselben beinahe 3,1415 Schuh, weßhalb die Kreislinie immer beinahe 3,1415mal größer ist, als ihr Durchmesser.

1. Zusatz: Weil man das Verhältniß des Diameters zur Peripherie nicht genau in Zahlen anzugeben weiß, so hat man es durch Annäherung bestimmt:

a) Archimedes nahm an, daß die Kreislinie größer, als der Perimeter eines in den Kreis, und kleiner als der Perimeter eines um den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes ist, und suchte die Perimeter zweier solcher Vielecke von sehr vielen Seiten, wo also diese Perimeter selbst sehr wenig von einander unterschieden waren, und nahm die arithmetische Mittelzahl derselben für die gesuchte Größe der Kreislinie (Arithm. IV. §. 26. Zus.)

Er fand auf diesem mühsamen Wege die beiden Verhältnisse 7 : 22, und 71 : 223, von welchen das erstere die Kreislinie etwas zu groß, und das letztere etwas zu klein angibt, das ist, wenn der Durchmesser 7 Schuh hat, so hält die Peripherie nicht gar 22 Schuh, und hat der Durchmesser 71 Schuh, so beträgt die Peripherie des Kreises etwas mehr als 223 Schuh.

b) Nach ihm hat Herr Ludolph von Ceulen, von Hildesheim gebürtig und Professor der Mathematik in Leyden, das Verhältniß des Diameters zur Peripherie sehr genau bis auf 32 Dezimalen bestimmt; indem er das Verhältniß fand

$$1 : 3,14159265358979323846264338327950.$$

c) In dem logarithmisch-trigonometrischen Handbuche des k. k. österreichischen Herrn Oberstlieutenants Georg Freiherrn von Vega findet man am

Schlusse der ersten Abtheilung der logarithmischen Tafeln das vorstehende ludolphische Verhältniß bis auf 140 Dezimalen angegeben. Herr Euler gibt in der Abhandlung „de variis modis circuli quadraturam proxime exprimendi" den Umkreis auf 127 Dezimalstellen an; die ersten 100 Ziffer hat Machin, alle aber Lagny gefunden. Das Oxford'sche Manuskript gibt 157 Dezimalen an. Verschiedene Arten, durch den Differential- und Integralkalkul die Dezimalen schneller zu finden, als es durch die niedere Geometrie geschehen kann, lehren in ihren Lehrbüchern Leibnitz, Kästner, Wolf, Magold u. a. Man sehe auch folgende Abhandlung: Entwurf von vortrefflichen höher-mathematischen Lehren, Wien 1764.

Der Kürze wegen wird in der Folge die im ludolphischen Verhältnisse vorkommende Zahl 3,14159265.... mit dem griechischen Buchstaben π bezeichnet, so daß $\pi = 3{,}14159265\ldots$, und also Log. π = Log. 3,14159265.... = 0,4971499 (Arithm. IV. §. 68.), wenn man nämlich den Logarithmus nur bis auf 7 Dezimalen angibt; ferner ist (Arithm. IV. §. 67.) der Logarithmus von $\frac{1}{2}\pi$, oder Log. $\frac{1}{2}\pi = 0{,}1961199$, und Log. $\frac{1}{4}\pi = 0{,}8950899 - 1$. In dem erwähnten Handbuche findet man den Logarithmus von π bis auf 23 Dezimalen angegeben.

d) Das Verhältniß des Herrn Professors Adrian Metius ist leicht im Gedächtnisse zu behalten; man setzt nämlich jede der drei ersten ungeraden Zahlen doppelt, und trennt die ersten drei Ziffern durch das Verhältnißzeichen (:) von den letzten, man erhält dadurch das Verhältniß 113 : 355, welches bis auf die siebente Dezimalstelle mit dem ludolphischen zusammentrifft, und deßhalb bei Berechnungen, wo man nicht mehr als sechs Dezimalen braucht, zureichend genau ist; es ist aber dieses Verhältniß in der Anwendung nicht so bequem, wie das ludolphische, weßhalb ich mich in der Folge immer des letzteren bedienen werde.

II. Zusatz: Dividirt man das Verhältniß 7 : 22

durch 7, dann 71 : 223 durch 71, und 113 : 355 durch 113, so werden diese Verhältnisse nicht geändert (Arithm. IV. §. 34. B.), und man erhält die Verhältnisse 1 : $^{22}/_{7}$, dann 1 : $^{223}/_{71}$, und 1 : $^{355}/_{113}$; verwandelt man diese Brüche in Dezimalbrüche (Arithm. III. §. 7.), so erhält man die Verhältnisse:

α) Nach Archimed 7 : 22 = 1 : $^{22}/_{7}$ = 1 : 3,142857....
und 71 : 223 = 1 : $^{223}/_{71}$ = 1 : 3,140845....

β) Nach Metius 113 : 355 = 1 : $^{355}/_{113}$ = 1 : 3,1415929...

Vergleicht man diese Verhältnisse mit dem ludolphischen Verhältnisse 1 : 3,14159265 ...., so wird man bemerken, daß die bei α. angeführten Verhältnisse vom ludolphischen, welches zur Prüfung der übrigen Verhältnisse dient, schon bei der dritten Dezimalstelle abweichen, was in Absicht auf das bei β. angeführte Verhältniß erst beim siebenten Dezimalziffer der Fall ist.

III. Zusatz: In dem ludolphischen Verhältnisse 1 : π bezeichnet demnach die Zahl π die relative Größe der ganzen Peripherie, wenn man den Durchmesser des Kreises zum Maaße oder zur Einheit nimmt (Arithm. I. §. 2. e.); ist der Durchmesser = 1, so ist die Peripherie = π, dann die Größe der halben Peripherie = $\frac{1}{2}\pi$, und die des Quadranten = $\frac{1}{4}\pi$, indem nach Nro. 5. der Auflösung $d : p = 1 : 3{,}1415\ldots$, oder $d : p = 1 : \pi$, mithin $p = d\pi = \pi$ (Arithm. IV. §. 35. Zus. IV.), dann $\frac{1}{2}p = \frac{1}{2}\pi$, und $\frac{1}{4}p = \frac{1}{4}\pi$.

IV. Zusatz: Bezeichnet r den Halbmesser des Kreises, und setzt man in der vorstehenden Proportion 2r anstatt d, so verhält sich

$$2r : p = 1 : \pi,$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{also } r : p = \frac{1}{2} : \pi \\ \text{und } r : p = 1 : 2\pi \end{array}\right\} \text{(Arithm. IV. §. 41.)}$$

Nimmt man daher den Halbmesser zum Maaße, oder zur Einheit und setzt man $r = 1$, so ist $p = 2\pi$, dann $\frac{1}{2}p = \frac{2\pi}{2} = \pi$, und $\frac{1}{4}p = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$, d. h., in dieser Voraussetzung drückt 2π die relative Größe

der ganzen, und π die der halben Peripherie aus, und $\frac{1}{2}\pi$ bezeichnet die relative Größe des Quadranten.

Anmerkung: 1) Weil in den mathematischen Rechnungen oft das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie vorkommt, und deßhalb die Zahlen π, $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{4}\pi$ vielmal benützt werden, so habe ich im I. Zusatze dieses §. bei c. die Logarithmen von π, $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{4}\pi$ angegeben.

2) In der Anwendung nimmt man von der ludolphischen Verhältnißzahl $\pi = 3{,}14159265\ldots\ldots$ mehr oder weniger Dezimalstellen, je nachdem eine größere oder kleinere Genauigkeit in Absicht auf das gesuchte Resultat erfordert wird.

§. 133.

VIII. Aufgabe, aus dem gegebenen Durchmesser des Kreises die Peripherie zu finden.

Auflösung:

1) Drückt man den Durchmesser durch d, die Peripherie durch p, und die ludolphische Verhältnißzahl 3,1415 .... durch π aus, so verhält sich nach dem im §. 132. aufgestellten Lehrsatze $d : p = 1 : \pi$;

2) Verwandelt man diese Proportion in eine Gleichung (Arithm. IV. §. 35. Zus. IV.), so findet man, daß $p = d\pi$, das ist, man findet die Peripherie des Kreises, wenn man den gegebenen Durchmesser mit der Verhältnißzahl π multiplizirt.

I. Zusatz: Weil der Durchmesser dem zweifachen Radius des Kreises gleich ist, also $d = 2r$, so ist $p = 2r\pi$, d. h., man erhält auch die Peripherie des Kreises, wenn man den doppelten Radius mit der Verhältnißzahl π multiplizirt.

II. Zusatz: Da $p = d\pi$, und $p = 2r\pi$, so ist $d = \frac{p}{\pi}$, und $r = \frac{p}{2\pi}$ (Arithm. III. §. 97. a.); d. h., aus der angegebenen Peripherie des Kreises findet man

den Durchmesser, wenn man die Peripherie mit der Verhältnißzahl π dividirt, und den Radius findet man, wenn man die Peripherie mit der doppelten Verhältnißzahl π dividirt.

I. Beispiel:

In einer Reitschule bewegt sich ein Pferd in einem Kreise, dessen Durchmesser $30\frac{1}{2}$ Schuh beträgt; welchen Weg legt dasselbe zurück, wenn es den Kreis an seiner ganzen Gränze durchläuft?

Auflösung:

Die Linie, welche das Pferd in dieser Voraussetzung durchläuft, ist eine Kreislinie, oder die Peripherie eines Kreises, dessen Durchmesser $30\frac{1}{2}$, oder 30,5 Schuh beträgt, weßhalb $p = 30{,}5 \times 3{,}1415 \ldots = 95{,}81575$ (Arithm. III. §. 14.); das Pferd durchläuft also eine Bahn, welche beinahe 95 Schuh, 8 Zoll und 2 Linien beträgt (Arithm. I. §. 79.), man nimmt nämlich wegen der weggelassenen weiteren Dezimalen, die mehr als eine halbe Linie betragen, zwei Linien anstatt einer Linie.

II. Beispiel:

Weil auf einen Meridiangrad 15 deutsche oder geographische Meilen gehen, so hat der Erdkörper in seinem ganzen Umfange, den die Peripherie eines größten Kreises der Erdkugel bestimmt, 5400 deutsche Meilen; es ist nun die Frage, wie groß ist der Durchmesser der Erde?

I. Auflösung:

Drückt man den Durchmesser der Erde durch d, und ihren Umfang durch p aus, so verhält sich $d : p = 1 : \pi$, also (Arithm. IV. §. 36.) ist $d = \frac{p}{\pi}$

$$= \frac{5400}{3{,}1415\ldots} = 1718{,}9\ldots \text{ (Arithm. III. §. 18.)}$$

Der Durchmesser der Erde hat daher 1718,9 .... deutsche oder geographische Meilen.

II. Auflösung:

Rechnet man mit Logarithmen, so ist (Arithm. IV. §. 76.), weil $d = \frac{p}{\pi}$, der Log. d = Log. p — Log. π; nämlich:

$$\text{Log. } p = 3{,}7323938$$
$$\text{Log. } \pi = 0{,}4971499$$

also Log. p — Log. π = 3,2352439 = Log. 1718,87...

Es hat demnach der Durchmesser der Erde 1718,87... deutsche Meilen.

Anmerkung: 1) Weil die Bestimmung des Durchmessers aus dem bekannten Umfange der Erde auf einer Annäherung beruht, so drückt man gewöhnlich den Diameter in einer geraden Zahl aus, und man sagt, der Durchmesser der Erdkugel habe 1720, mithin ihr Halbmesser 860 deutsche oder geographische Meilen.

2) Mit Logarithmen rechnet man bei größeren Zahlen bequemer, als nach den Regeln der gemeinen oder niederen Arithmetik, wo die Multiplikation und Division mit mehrzifferichten Zahlen etwas beschwerlich ist (Arithm. IV. §. 63. Anm. 3.).

§. 134.

IX. Aufgabe, für den Halbmesser 1 die relative Größe eines Kreisbogens anzugeben, welcher eine bestimmte Anzahl von Graden hält.

Auflösung:

1) Setzet man die gesuchte Größe des Kreisbogens = arc., und drückt man die Anzahl der Grade, die der Bogen hält, durch n aus, so hat der Zentriwinkel dieses Bogens ebenfalls n Grade (§. 63. Zus. II.).

2) Ist der Halbmesser des Kreises = 1, so beträgt die Größe des Quadranten ½π, und dieser hält, wie sein Zentriwinkel, 90 Grad, folglich verhält sich (§. 132. Zus. IV.)

$$90^\circ : n^\circ = \tfrac{1}{2}\pi : \text{arc.}$$

Daher ist für den Halbmesser = 1 die relative Größe des Bogens, oder arc. $= \frac{n^{\circ} \times \pi}{180^{\circ}}$.

Hält z. B. der Kreisbogen 45 Grad, und ist somit $n = 45^{\circ}$, so ist beim Halbmesser 1 die Größe des Bogens, oder arc. $45^{\circ} = \frac{45^{\circ} \cdot \pi}{180^{\circ}} = \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4} \times 3{,}14159265 \ldots = 0{,}78539816 \ldots$

I. Zusatz: Enthält der Bogen nebst Graden einige Minuten, oder bloß Minuten, so muß man sowohl die Größe des Bogens, welche durch n ausgedrückt ist, als auch die 180 Grad, die im Nenner des Bruches $\frac{n^{\circ} \times \pi}{180^{\circ}}$ vorkommen, auf Minuten reduziren (Arithm. I. §. 86.); es wird dadurch arc. $= \frac{n' \times \pi}{10800'}$.

Hat z. B. der Kreisbogen 20 Minuten, so ist beim Halbmesser 1 seine relative Größe, oder

$$\text{arc. } 20' = \frac{20' \times \pi}{10800'} = \frac{\pi}{540} = \frac{3{,}14159265}{540} \ldots$$

$= 0{,}005817764 \ldots$; indem

$$\begin{aligned} \text{Log. } \pi &= 0{,}4971499 \\ \text{Log } 540 &= 2{,}7323938 \end{aligned}$$

also $\text{Log. } \pi - \text{Log } 540 = 0{,}7647561 - 3 = \text{Log. arc. } 20' = \text{Log. } 0{,}005817764 \ldots$ (Arithm. IV. §. 72.).

II. Zusatz: Ist der Kreisbogen in Graden, Minuten und Sekunden gegeben, oder enthält er nur Minuten und Sekunden, oder endlich bloß Sekunden, so muß man sowohl die Größe des Bogens, als auch die im angeführten Bruche vorkommenden 180 Grad auf Sekunden reduziren; man erhält dadurch für den Halbmesser 1 die relative Größe des Bogens, oder arc. $= \frac{n'' \cdot \pi}{648000''}$.

Für $n = 40''$ ist also, wenn der Halbmesser = 1

ist, die Größe des Bogens, oder $\text{arc. } 40'' = \frac{40'' \cdot \pi}{648000''}$

$$= \frac{\pi}{16200} = \frac{3,14159265\ldots}{16200} = 0,0001939254\ldots;$$

indem

$$\text{Log. } \pi = 0,4971499$$
$$\text{Log. } 16200 = 4,2095150$$

also $\text{Log. } \pi - \text{Log. } 16200 = 0,2876349 - 4$
$= \text{Log. arc. } 40'' = \text{Log. } 0,0001939254\ldots$

III. Zusatz: Ist für einen Kreis der Radius r im gewöhnlichen Fußmaaße gegeben, und man sucht nun in eben diesem Fußmaaße die Größe eines Bogens dieses Kreises, welcher in Graden, Minuten und Sekunden bestimmt ist, so darf man nur die relative Größe oder arc. für den Halbmesser 1 suchen, und die gefundene Zahl mit r multipliziren, das ist, wenn Arc. die gesuchte Länge dieses Bogens bezeichnet, so ist Arc. = arc. $\times$ r.

Denn wenn p die Peripherie des Kreises ausdrückt, und man verwandelt die gegebenen Grade und Minuten in Sekunden, setzet diese $= n''$, und man reduzirt zugleich auf Sekunden die Größe des Quadranten, welcher 90 Grad hält (§. 62. Zus. I.), und deßhalb 324000" hat, so ist

$324000'' : n'' = \frac{1}{2}\pi : \text{arc.}$ (§. 132. Zus. IV.),
$324000'' : n'' = \frac{1}{4}p : \text{Arc.}$ (§. 62. a.),
$324000'' : n'' = \frac{1}{4}2r\pi : \text{Arc.}$ (§. 133. Zus. I.),
und $324000'' : n'' = \frac{1}{2}r\pi : \text{Arc.}$,
mithin $\frac{1}{2}\pi : \frac{1}{2}r\pi = \text{arc.} : \text{Arc.}$,
oder $1 : r = \text{arc.} : \text{Arc.}$,
also $\text{Arc.} = \text{arc.} \times r$.

IV. Zusatz: Die Größe eines Kreisbogens kann also auf eine dreifache Weise bestimmt werden:

a) Durch das Verhältniß des Bogens zum Quadranten, das ist, in Graden, Minuten und Sekunden, in dieser Beziehung ist der Bogen seinem Zentriwinkel gleich (§. 62. Zus. III.); dann

b) Durch das Verhältniß des Bogens zum Radius, so daß man bei der Bestimmung den Radius zur Einheit nimmt, man nennt dieses die relative Größe des Bogens; und endlich

c) Durch das Verhältniß desselben zum gewöhnlichen Längenmaaße, z. B. zum Fußmaaße, man heißt dieses die wahre oder absolute Größe des Bogens.

Anmerkung: Weil man in der Trigonometrie, und überhaupt in der höheren Mathematik die relative Größe der Kreisbögen öfter braucht, so wurden dieselben für die einzelnen Grade, Minuten und Sekunden berechnet, und werden den trigonometrischen Tafeln in besondern Tabellen gewöhnlich beigefügt.

II. Theil der Geometrie.

Die Planimetrie.

I. Hauptstück.

Von der Gleichheit und Verwandlung der Figuren.

§. 135.

I. Lehrsatz:

Wenn man in einem Parallelogramme durch einen beliebigen Punkt der Diagonallinie zwei gerade Linien mit den Seiten des Parallelogrammes parallel ziet, so entstehen vier Parallelogramme, von welchen jene zwei dem Flächeninhalte nach einander gleich sind, durch welche die Diagonallinie nicht durchgeht.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 102.) im Parallelogramme AC die Diagonallinie AC gezogen, und durch ihren Punkt F die Linie HK parallel zu BA, und EG parallel zu AD;

2) Weil HK ‡ AB, und EG ‡ AD, so ist auch HK ‡ CD, und EG ‡ BC (§. 41. Zus. III.), weßhalb die Vierecke AF, FC, BF und FD Parallelogramme sind (§. 48. a.);

3) Die Diagonal halbirt jedes Parallelogramm (§. 48. Zus. VI.), daher ist

$$\triangle AEF = \triangle AKF,$$
und $\triangle FHC = \triangle FGC,$

also $\triangle AEF + \triangle FHC = \triangle AKF + \triangle FGC,$
ferner ist $\triangle ABC = \triangle ADC,$
mithin $\triangle ABC - (\triangle AEF + \triangle FHC)$
$= \triangle ADC - (\triangle AKF + \triangle FGC),$
folglich $\square BF = \square KG$, d. h., jene zwei Parallelogramme BF und KG sind einander gleich, durch welche die Diagonallinie AC nicht durchgeht.

I. Zusatz: Ist das gegebene Parallelogramm eine Raute, so sind die zwei Parallelogramme, durch welche die Diagonallinie durchgeht, ebenfalls Rauten.

Denn ist (Fig. 103.) das Parallelogramm AC eine Raute (§. 50. c.), so ist AD = DC, somit der Winkel n = q (§. 21. Zus. I.), dann n ist = x (§. 41.), und x = y (§. 10. Zus. III.), also y = q, und FG = GC = HC = HF (§. 23.), weßhalb das Parallelogram HG eine Raute ist.

Eben so, wenn AC eine Raute ist, und somit AB = BC, ist der Winkel m = p, dann p = y, und y = x, also m = x, und AE = EF = FK = AK, d. h., das Parallelogramm AF ist ebenfalls eine Raute.

II. Zusatz: Ist (Fig. 103.) AC eine Raute, so sind BF und FD Rhomboiden (§. 50. d.) aus den Seiten AK und KD. Denn GD ist = AE (§. 41. Zus. IV.) = AK (Zus. I.), mithin sind die Linien AK und KD die Seiten von FD; eben so ist BH = AK, und EB = CG = FG = KD, folglich sind AK und KD auch die Seiten von BF.

III. Zusatz: Wenn (Fig. 103.) der Winkel A = 90 Grad, so werden die Rauten EK und HG Quadrate (§. 50. a.), und die Parallelogramme BF und FD werden Rechtecke (§. 50. b.); ferner hat in dieser Voraussetzung das Quadrat EK zur Seite den Theil AK der Grundlinie AD, und das Quadrat HG hat zur Seite die Linie FG, welche dem Theile KD gleich ist (Zus. I.); und die beiden Rechtecke BF und FD haben zu ihren Seiten die nämlichen Theile AK und KD (Zus. II.)

IV. Zusatz: Wenn man (Fig. 103.) eine gerade Linie AD in zwei Theile AK und KD theilet, und über

die ganze Linie AD das Quadrat AC verzeichnet, so besteht dieses aus den Quadraten von AK und KD, und aus zwei Rechtecken, von welchen AK und KD ebenfalls die Seiten sind (Zus. III.)

Anmerkung: Wenn gleich die Diagonallinie das Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke theilet, so sieht man hier doch nur auf die Gleichheit des Flächeninhaltes, und macht deßhalb beim Beweise des vorstehenden Lehrsatzes zur Bezeichnung der gleichen Quantität der Dreiecke das Gleichheitszeichen (=); indem man hier auf die gleiche Qualität der Dreiecke, welche dieses Zeichen (∽) ausdrückt, keine Rücksicht nimmt.

§. 136.

Die Verwandlung der Figuren.

Eine Figur in eine andere verwandeln heißt eine Figur verzeichnen, welche der gegebenen dem Flächeninhalte nach gleich ist, und also mit derselben die nämliche Quantität hat.

Daher wird z. B. ein Dreieck in ein Parallelogramm verwandelt, wenn man ein Parallelogramm verzeichnet, das dem Flächeninhalte nach dem Dreiecke gleich ist, und also mit dem Dreiecke einerlei Größe, das ist, die nämliche Quantität hat.

§. 137.

I. Aufgabe, ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, welches eine gegebene Seite enthält.

Auflösung:

1) Man soll (Fig. 102.) das Parallelogramm KG in anderes Parallelogramm verwandeln, das die gegebene Linie MN zur Seite hat;

2) Man verlängere die Seite DG, und mache die Verlängerung GC = MN, und ziehe die gerade Linie CF, welche, verlängert, die ebenfalls verlängerte Seite DK in einem Punkte A durchschneiden wird (§. 41. Zus. 1.);

3) Aus den Linien AD und DC und dem eingeschlossenen Winkel D verzeichne man das Parallelogramm DB nach Vorschrift des §. 49., und verlängere KF bis H, und GF bis E, man erhält das Parallelogramm BF als das verlangte Parallelogramm.

Beweis:

1) Das Viereck BF ist wieder ein Parallelogramm, weil in ihm beide Paare opponirter Seiten parallel sind, und es ist dem gegebenen Parallelogramme KG gleich (§. 135.);

2) Ferner ist die Seite EB = CG (§. 41. Zus. IV.), und CG = MN, also EB = MN, das ist, im Parallelogramme BF kommt auch die gegebene Linie MN als Seite vor.

§. 138.

Bestimmung, in wie ferne Parallelogramme und Dreiecke zwischen Parallelen liegen.

a) Zwei Parallelogramme liegen zwischen Parallelen, wenn ihre Grundlinien in der einen, und die gegenüberstehenden Seiten in der anderen Parallele liegen.

Daher liegen (Fig. 104.) die Parallelogramme EH und PN zwischen den Parallelen AB und CD, da ihre Grundlinien EF und PQ in der Parallele AB, und die opponirten Seiten GH und MN in der Parallele CD liegen.

b) Zwei Dreiecke liegen zwischen Parallelen, wenn ihre Grundlinien in der einen, und ihre Spitzen in der anderen Parallele liegen.

Deßwegen liegen (Fig. 105.) die Dreiecke FEG und MNP zwischen den Parallelen AB und CD, da ihre Grundlinien in der Parallele AB, und ihee Spitzen E und M in der Parallele CD liegen.

I. Zusatz: Parallelogramme und Dreiecke zwischen einerlei Parallelen haben gleiche Höhen. Denn (Fig. 104.) die Perpendikel HR und NS sind die Höhen der Parallelogramme (§. 48. d.), und einander gleich (§. 41. Zus. V.); und aus dem nämlichen Grun-

Grunde sind (Fig. 105.) die Höhen EH und MK der beiden Dreiecke FEG und NMP einander gleich.

II. Zusatz: Parallelogramme, derer Grundlinien in einer geraden Linie liegen, und welche gleiche Höhen haben, liegen zwischen Parallelen.

Denn (Fig. 104.) wenn die Grundlinien EF und PQ in der geraden Linie AB liegen, und die Höhen HR und NS einander gleich sind, und man zieht durch H und N die gerade Linie CD, so ist HR $\stackrel{=}{\#}$ NS, also auch HN oder CD # AB (§. 48. Zus. VIII.); durch die Punkte H und N gibt es aber zu AB nur eine einzige Parallele, also liegen die opponirten Seiten GH und MN, die ebenfalls mit AB parallel sind, in der anderen Parallele CD, und die Parallelogramme liegen in der angeführten Voraussetzung zwischen Parallelen.

III. Zusatz: Zwei Dreiecke, derer Grundlinien in einer geraden Linie liegen, und welche gleiche Höhe haben, liegen zwischen Parallelen.

Ziebt man (Fig. 105.) durch die Spitzen E und M die gerade Linie *CD*, so ist EH $\stackrel{=}{\#}$ MK, also EM oder C*D* # AB, und die Dreiecke liegen zwischen den Parallelen AB und C*D*.

§. 139.

II. Lehrsatz:

Parallelogramme von einerlei Grundlinien sind gleich, wenn sie zwischen Parallelen liegen.

Beweis:

1) Wenn zwei Parallelogramme zwischen Parallelen liegen, und eine gemeinschaftliche Grundlinie haben, so kann die opponirte Seite des zweiten Parallelogrammes eine dreifache Lage haben:

a) Es kann (Fig. 106.) der Anfangspunkt *D* der Seite DE zugleich der Endspunkt der anderen opponirten Seite CD sein;

b) Oder (Fig. 107.) es kann der Anfangspunkt E der Seite EF innerhalb der anderen opponirten Seite CD sein;

(c Oder es kann endlich (Fig. 108.) der Anfangs-

punkt E der Seite EF außerhalb der opponirten Seite CD liegen.

2) Im ersten Falle (Fig. 106.) ist

CD = AB, und AB = DE,

also CD = DE
dann AC = BD (§. 48. Zus. V.)
und AD = BE

mithin △ ACD = △ BDE (§. 24.),
ferner △ ADB = △ ADB,

also △ ACD + △ ADB = △ BDE + △ ADB,
folglich ist das Parallelogramm BC = AE.

3) Im zweiten Falle (Fig. 107.) ist wieder

CD = AB, und AB = EF,
also CD = EF,
dann ED = ED,

mithin CD — ED = EF — ED, das ist, weil CE, ED und DF in einer geraden Linie liegen,

CE = DF,
dann AC = BD,
und AE = BF,

also △ ACE = △ BDF.
ferner Trap. AD = AD

also △ ACE + Trap. AD = △ BDF + Trap. AD,
folglich ist das Parallelogramm AD = AF.

4) Im dritten Falle endlich (Fig. 108.) ist ebenfalls

CD = AB, und AB = EF,
also CD = EF,
dann DE = DE,

mithin CD + DE = DE + EF,
oder CE = DF,
ferner AC = BD,
und AE = BF,

folglich △ ACE = △ BDF,
dann △ DGE = △ DGE,
und △ AGB = △ AGB,

also △ ACE — △ DGE + △ AGB
= △ BDF — △ DGE + △ AGB,
folglich ist das Parallelogramm AD = AF.

Zusatz: Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind einander gleich.

Denn man lege in einer Ebene die Grundlinien auf einander, so kongruiren sie (§. 3. Zus. V.); nun haben die Parallelogramme die nämliche Grundlinie, und eine gleiche Höhe, also liegen sie zwischen Parallelen (§. 138. Zus. II.), folglich sind sie nach dem aufgestellten Lehrsatze einander gleich.

Anmerkung: Daß hier unter der Gleichheit der Figuren nur ihre gleiche Quantität, oder ihr gleich großer Flächeninhalt verstanden wird, ist schon am Schlusse des §. 135. bemerkt worden. Man muß nämlich zwischen ähnlichen, gleichen, und kongruenten Figuren genau unterscheiden; die Aehnlichkeit der Figuren bestimmt die gleiche Qualität, die Gleichheit der Figuren die gleiche Quantität, und die Kongruenz derselben die gleiche Qualität und Quantität zugleich, was durch die drei verschiedenen Zeichen „$\backsim$, $=$ und $\cong$“ angezeigt wird.

§. 140.

II. Aufgabe, ein Parallelogramm in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung:

1) Man theile (Fig. 109). im Parallelogramme AC eine Seite AD in drei gleiche Theile (§. 86.), und ziehe durch die Theilungspunkte E und F zur anliegenden Seite AB oder DC die Parallelen EG und FH (§. 39.);

2) Es wird dadurch das Parallelogramm AC in drei gleiche Theile getheilt, indem die Parallelogramme AG, EH und FC gleiche Grundlinien haben, dann zwischen Parallelen liegen, und deßhalb einander gleich sind (§. 139. Zus.)

§. 141.

III. Aufgabe, ein Parallelogramm in ein anderes mit einem gegebenen Winkel zu verwandeln.

Auflösung:

1) Man verzeichne (Fig. 108.) den gegebenen Win-

kel a an die Seite AB des gegebenen Parallelogrammes AD, so daß GAB = a (§. 25.);

2) Man verlängere die Linien AG und CD, und ziehe durch B die Parallele BF zu AE (§. 39.), so werden die Linien AE und BF die verlängerte Linie CD schneiden, und man erhält das verlangte Parallelogramm AF.

Beweis:

Das Viereck AF ist ein Parallelogramm (§. 48. a.), und dem gegebenen Parallelogramme AD gleich (§. 139.); dasselbe enthält ferner den gegebenen Winkel a, und man hat das Parallelogramm AD in das Parallelogramm AF mit dem gegebenen Winkel a verwandelt (§. 136.).

Zusatz: Ist der gegebene Winkel a ein rechter Winkel, also = 90°, so wird das neue Parallelogramm ein Rechteck; daher läßt sich jedes Parallelogramm in ein Rechteck verwandeln.

§. 142.

IV. Aufgabe, das Parallelogramm in ein anderes mit einem gegebenen Winkel, und einer gegebenen Seite zu verwandeln.

Auflösung:

1) Man verwandle das gegebene Parallelogramm A in ein anderes B, welches die gegebene Seite enthält (§. 137.);

2) Dieses Parallelogramm B verwandle man wieder in ein anderes C, welches den gegebenen Winkel enthält (§. 141.).

Man erhält auf diese Weise ein Parallelogramm C, welches die gegebene Seite, und den gegebenen Winkel enthält.

Zusatz: Ist der gegebene Winkel ein rechter Winkel, so wird das Parallelogramm C ein Rechteck; daher läßt sich jedes Parallelogramm in ein Rechteck von einer gegebenen Seite verwandeln.

Anmerkung: Die Parallelogramme sind hier der Kürze wegen mit einem einzigen Buchstaben allgemein bezeichnet worden, damit man sie auf diese Weise, indem auf keine bestimmte Figur hingewiesen wird, von einander unterscheiden kann.

§. 143.

III. Lehrsatz:

Das Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogrammes, welches mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 110.) das Dreieck CAB gegeben, und man verzeichne über die Seiten CA und AB, und den eingeschlossenen Winkel CAB das Parallelogramm *AD* (§. 49.), so hat dieses mit dem Dreiecke die nämliche Grundlinie und Höhe (§. 41. Zus. V.);

2) Ferner ist das Dreieck ACB = ½ Parallelogr. *AD*, und jedes Parallelogramm, welches mit *AD*, folglich mit dem Dreiecke *ACB* gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat, ist dem Parallelogramme *AD* gleich (§. 139. Zus.);

3) Daher ist das Dreieck die Hälfte eines jeden solchen Parallelogrammes.

I. Zusatz: Dreiecke von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich. Denn man denke sich über jedes Dreieck ein Parallelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe, so ist nach dem Lehrsatze dieses §. jedes Dreieck die Hälfte seines Parallelogrammes; ferner sind diese Parallelogramme einander gleich (§. 139. Zus.), also sind es auch die Dreiecke als ihre Hälften.

II. Zusatz: Mehrere Dreiecke von gleicher Höhe sind zusammen einem Dreiecke gleich, welches die nämliche Höhe, und die Summe aller Grundlinien zur Basis hat.

Haben (Fig. 106.) die Dreiecke ACD, ADB und BEF gleiche Höhe, so sind sie (Fig. 111.) dem Dreiecke abc gleich, wenn dasselbe die nämliche Höhe hat,

und seine Basis der Summe der Grundlinien dieser Dreiecke gleich ist, mithin ac = CD + AB + BF.

Denn trägt man diese Grundlinien auf der Basis ac auf, so daß ad = CD, dann de = AB, und ec = BF, und zieht man im Dreiecke abc die geraden Linien bd und be, so ist

$$\left.\begin{array}{l}\triangle\ abd = ACD \\ \triangle\ dbe = ADB \\ \triangle\ ebc = BEF\end{array}\right\}\text{(Zus. I.)},$$

mithin △ abd + △ dbe + △ ebc = △ ACD + △ ADB + △ BEF,

folglich ist △ abc = △ ACD + △ ADB + △ BEF.

III. Zusatz: Ein Dreieck ist so groß wie ein Parallelogramm, welches die nämliche Höhe, aber nur die halbe Grundlinie des Dreieckes zur Basis hat.

Denn (Fig. 112.) man verzeichne (§. 49.) über CA, AB und den Winkel A das Parallelogramm AE, so ist das Dreieck CAB = ½AE (Lehrs.); ist nun AF = BF, so ist □ AD = □ FE = ½ □ AE (§. 139.) mithin ist △ CAB = □ AD = □ FE.

§. 144.

V. Aufgabe, ein Dreieck in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung:

1) Ist (Fig. 113.) das Dreieck in vier gleiche Theile zu theilen, so theile man die Basis AC in vier gleiche Theile (§. 86.);

2) Zu den Theilungspunkten D, E und F ziehe man von der Spitze B die geraden Linien BD, BE und BF, so ist das Dreieck ABC in die vier gleichen Theile ABD, DBE, EBF und FBC getheilt, indem diese Dreiecke die nämliche Höhe (§. 33. Zus. IV.), und gleiche Grundlinien haben (§. 143. Zus. I.).

§. 145.

VI. Aufgabe, ein Dreieck in ein Parallelogramm mit einem gegebenen Winkel zu verzeichnen.

Auflösung:

1) Man halbire (Fig. 112.) die Basis AB des

Dreieckes ACB (§. 27.), und verzeichne über FB am Punkte F den gegebenen Winkel a (§. 25.), so daß GFB = a;

2) Durch C ziehe man zu AB die Parallele CH (§. 39.), verlängere den Schenkel FG, bis er CH schneidet (§. 41. Zus. I.), und ziehe durch B bis H die Linie BH parallel zu FG, so ist FH das verlangte Parallelogramm (§. 48. a.), welches den gegebenen Winkel a = GFB enthält, und dem Dreiecke ACB gleich ist (§. 143. Zus. III.).

Zusatz: Ist der gegebene Winkel a ein rechter Winkel, also a = 90°, so wird das Parallelogramm ein Rechteck; daher läßt sich jedes Dreieck in ein Rechteck verwandeln.

§. 146.

VII. Aufgabe, ein Dreieck in ein Parallelogramm mit einem bestimmten Winkel, und einer gegebenen Seite zu verwandeln.

Auflösung:

1) Man verwandle das gegebene Dreieck A in ein Parallelogramm B mit dem gegebenen Winkel (§. 145.);

2) Das Parallelogramm B verwandle man in ein anderes Parallelogramm C mit der bestimmten Seite (§. 137.);

3) Weil nun das Parallelogramm C = B, dann das Parallelogr. B = A, so ist das Parallelogr. C = Parallelogr. A, und es ist C das verlangte Parallelogramm mit einem bestimmten Winkel und einer gegebenen Seite.

Zusatz: Ist der gegebene Winkel ein rechter Winkel, so wird das Parallelogramm C ein Rechteck (§. 48. Zus. IV.); daher läßt sich jedes Dreieck in ein Rechteck mit einer gegebenen Seite verwandeln.

§. 147.

VIII. Aufgabe, eine geradlinigte Figur in mehrere Trapezen zu theilen.

Auflösung:

1) Man ziehe in der nämlichen Ebene inner, oder

außer der Figur, oder an ihrer Gränze eine unbestimmte gerade Linie, und fälle auf sie von allen Ecken der Figur Perpendikel (§. 33.);

2) Zieht man die unbestimmte gerade Linie innerhalb der Figur, wie bei Figur 114., so verlängere man die Perpendikel bis zur gegenüberstehenden Gränze, somit das Perpendikel Bb bis B, dann Cc bis C ꝛc.;

3) Es werden auf diese Weise die geradlinigten Figuren in lauter Trapezen getheilt, nämlich (Fig. 114.) das Siebeneck ABDEFGC zerfällt in die Trapezen BAB, dann BBCC, CCDD ꝛc., und (Fig. 115.) das Sechseck ABCDEF in die Trapezen BbA, BbCc, CcDd ꝛc., indem man die dabei vorkommenden Dreiecke als Trapezen betrachten kann, bei welchen die kleinere Parallele gleich Null ist.

Anmerkung: 1) Gewöhnlich nimmt man die gerade Linie, auf welche die Perpendikel gezogen werden, innerhalb der Figur, oder an ihrer Gränze an; in welchem letzteren Falle eine Seite des Perimeters, wenn es nöthig ist, verlängert wird, um darauf von allen Ecken der Figur Perpendikel zu ziehen, wie dieses bei Figur 115. in Absicht auf die Seite AF geschehen ist.

2) Die gerade Linie, welche auf diese Weise in der nämlichen Ebene angenommen wird, um auf sie von den Ecken der Figur Perpendikel zu ziehen, heißt die Basis, Grundlinie, oder auch Abszissenlinie, und die Perpendikel nennt man die rechtwinklichten Ordinaten, oder bloß die Ordinaten der Figur (§. 102. Zus. II.).

§. 148.

IV. Lehrsatz:

Wenn man im rechtwinklichten Dreiecke über die Hypotenuse, und über die zwei Katheten Quadrate verzeichnet, so ist das Quadrat der Hypotenuse der Summe der Quadrate der beiden Katheten gleich.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 116.) das rechtwinklichte Dreieck

ABC gegeben, und man verzeichne die Quadrate AQ, AE und CF (§. 51. Anm. 1.);

2) Aus *B* ziehe man das Perpendikel BL, und verlängere es bis zur Seite HQ (§. 41. Zus. II.), so ist LP parallel zu AH und CQ, und deßwegen sind die Vierecke AP und PC Parallelogramme (§. 48. a.);

3) Man ziehe ferner *D*C und BH, so ist, weil man Quadrate verzeichnete (§. 50. a.), der Winkel

$$r = s = 90^\circ,$$
dann $q = q$,

also $r + q = s + q$, oder $DAC = BAH$,
ferner ist $DA = AB$,
und $AC = AH$,

mithin $\triangle\, DAC = \triangle\, BAH$ (§. 20.);

4) Zieht man auf der anderen Seite die Linien AG und BQ, so findet man aus den nämlichen Gründen, daß

$$\triangle\, ACG = \triangle\, BCQ;$$

5) Das Dreieck *DAC* hat mit dem Quadrate AE die nämliche Grundlinie *DA*, und eine gleiche Höhe (§. 41. Zus. V.), und eben so das Dreieck *BA*H mit dem Parallelogramme *A*P; daher ist (§. 143.)

$\triangle$ DAC $= \frac{1}{2}\,\square$ AE,
und $\triangle$ BAH $= \frac{1}{2}\,\square$ AP,
dann nach Nro. 3. ist $\triangle$ DAC $= \triangle$ BAH,

also $\frac{1}{2}\,\square$ AE $= \frac{1}{2}\,\square$ AP, und $\square$ AE $= \square$ AP;

6) Auf die nämliche Weise hat das Dreieck GCA mit dem Quadrate CF, und das Dreieck BCQ mit dem Parallelogramme CP eine gleiche Grundlinie und Höhe, weßhalb

$\triangle$ GCA $= \frac{1}{2}\,\square$ CF,
und $\triangle$ BCQ $= \frac{1}{2}\,\square$ CP,
dann nach Nro. 4. ist $\triangle$ ACG $= \triangle$ BCQ,

also $\frac{1}{2}\,\square$ CF $= \frac{1}{2}\,\square$ CP, und $\square$ CF $= \square$ CP;

7) Endlich ist nach Nro. 5.

$\square$ AP $= \square$ AE,
und nach Nro. 6. ist $\square$ CP $= \square$ CF,

also $\square$ AP $+ \square$ CP $= \square$ AE $+ \square$ CF,
oder $\square$ AQ $= \square$ AE $+ \square$ CF,
das heißt, $AC^q = AB^q + BC^q$.

Es ist also im rechtwinklichten Dreiecke das Quadrat der Hypotenuse der Summe der Quadrate der beiden Katheten gleich.

§. 149.

V. Lehrsatz:

Wenn in einem Dreiecke das Quadrat einer Seite der Summe der Quadrate der beiden übrigen Seiten gleich ist, so ist das Dreieck rechtwinklicht.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 117.) das Dreieck *BAC* gegeben, bei welchem $BC^q = AB^q + AC^q$;

2) Man errichte am Punkte A auf AB das Perpendikel AD (§. 45.), und mache es gleich AC, so ist (§. 50. Zus. III.)

$$AD^q = AC^q,$$
$$\text{dann } AB^q = AB^q,$$

$$\text{also } AD^q + AB^q = AC^q + AB^q,$$
$$\text{nach Nro. 1. ist } BC^q = AB^q + AC^q,$$
$$\text{und nach §. 148. ist } BD^q = AD^q + AB^q,$$

$$\text{also ist } BD^q = BC^q,$$
$$\text{und } BC = BD \text{ (§. 51. Zus. I.)},$$
$$\text{dann } AD = AC \text{ (ex constr.)},$$
$$\text{und } AB = AB,$$

$$\text{also } \triangle ABD \cong \triangle ABC \text{ (§. 24.)}$$

und $m = n$ (§. 18. Zus. IV.); nun ist nach Nro. 2. der Winkel $m = 90^o$ (§. 9. Zus. IV.), also ist auch $n = 90^o$.

Es ist also das Dreieck *BAC* rechtwinklicht, und der Winkel n, der der Seite BC gegenüber steht, ist der rechte Winkel.

Anmerkung: Man vergleiche diesen und den vorhergehenden §. mit dem §. 97. und mit dem I. Zusatze des §. 97.

§. 150.

IX. **Aufgabe**, mehrere Quadrate, derer Seiten gegeben sind, in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung.

1) Man trage (Fig. 118.) auf den Schenkeln eines rechten Winkels die beiden Seiten a und b von zwei Quadraten auf, und ziehe die Hypotenuse f, so ist $f^q = a^q + b^q$ (§. 148.);

2) An einem Ende der Seite f errichte man ein Perpendikel (§. 45.), und mache es der Seite c des dritten Quadrates gleich, ziehe wieder die Hypotenuse g, so ist $g^q = f^q + c^q = a^q + b^q + c^q$;

3) Man errichte an einem Endspunkte der Linie g wieder ein Perpendikel, mache es der Seite d des vierten Quadrates gleich, und ziehe die Hypotenuse h, so ist $h^q = g^q + d^q = a^q + b^q + c^q + d^q$;

4) Verzeichnet man aus f, g und h Quadrate, so ist das erste den beiden Quadraten aus a und b zusammen genommen gleich, das zweite den dreien aus a, b und c, und das dritte ist allen Vieren zusammen genommen gleich.

I. **Zusatz**: Wenn $a = b$, mithin $a^q = b^q$, so ist $f^q = a^q + a^q = 2a^q$; daher läßt sich jedes Quadrat verdoppeln, d. h., man kann allemal ein Quadrat verzeichnen, welches das Duplum des gegebenen Quadrates ist.

II. **Zusatz**: Ein gegebenes Quadrat wird halbirt, so daß die Hälfte wieder ein Quadrat ist, wenn man an beiden Enden einer Seite des Quadrates Perpendikel errichtet (§. 45.), die dadurch erhaltenen rechten Winkel halbirt (§. 26.), die halbirenden Linien verlängert, bis sie sich schneiden (§. 40.), und über einen Schenkel des dadurch erhaltenen gleichschenklichten rechtwinklichten Dreieckes ein Quadrat verzeichnet (§. 51. Anm. 1.).

Denn wenn (Fig. 116.) jeder der Winkel q und m die Hälfte eines rechten Winkels ist, so daß $q = m$

= 45 Grad, so ist AB = BC (§. 23.), also $AB^q = BC^q$ (§. 50. Zus. III.); ferner $AC^q = AB^q + BC^q$ (§. 148.), folglich $AC^q = AB^q + AB^q = 2AB^q$, und $AB^q = \frac{1}{2}AC^q$, d. h. das über *AB* verzeichnete Quadrat *AE* ist die Hälfte des gegebenen Quadrates *AQ*, über dessen Seite AC an den Endspunkten A und C die halben rechten Winkel q und m verzeichnet wurden.

§. 151.

VI. Lehrsatz:

Ein in den Kreis beschriebenes reguläres Vieleck ist einem Dreiecke gleich, welches den Perimeter zur Grundlinie, und die Entfernung einer Seite vom Mittelpunkte zur Höhe hat.

Beweis:

1) Zieht man (Fig. 100.) vom Zentrum C an alle Ecke des in den Kreis beschriebenen regulären Sechseckes Radien, so wird das Vieleck in so viele kongruente Dreiecke getheilt, als es Seiten hat (§. 127. Zus. II.)

2) Nimmt man eine solche Seite allemal als Grundlinie an, so ist die Entfernung derselben vom Mittelpunkte die Höhe, und für alle Dreiecke gleich (§. 126.);

3) Daher sind alle diese Dreiecke zusammen, oder das ganze Vieleck ist einem Dreiecke gleich, welches die nämliche Höhe, und die Summe aller Seiten oder den Perimeter zur Grundlinie hat (§. 143. Zus. II.).

Zusatz: Der Kreis ist einem Dreiecke gleich, welches den Radius zur Höhe und die Peripherie zur Basis hat (§. 130. Zus. II.).

II. Hauptstück.

Von Verhältnissen, und von der Bestimmung des Flächeninhaltes der Figuren.

§. 152.

I. Lehrsatz:

Wenn die Seite eines Quadrates in der Grundlinie eines Rechteckes m mal, und in der anliegenden Seite n mal enthalten ist, und die Buchstaben m und n ganze Zahlen bezeichnen, so ist das Quadrat im Rechtecke so vielmal enthalten, als die Zahl 1 im Produkte mn, oder das Rechteck ist mn mal größer, als das Quadrat.

Beweis:

1) Wenn (Fig. 119.) die Seite ab des Quadrates ad in der Seite AB des Rechteckes m mal enthalten ist, so läßt sich das Quadrat ad längs AB im Rechtecke m mal neben sich hin legen, mithin ist das Rechteck oder Rectang. $As = m \,.\, ad$;

2) Das Rechteck As läßt sich so oft längs AC anlegen, als die Seite ab oder ac des Quadrates in der Seite AC enthalten ist; wenn nun $AC = n \,.\, ac$, somit n ausdrückt, wie oft ac in AC enthalten ist, so ist das Rechteck $AD = n \,.\, As = mn \,.\, ad$, das ist, das Rechteck AD enthält mn solche Quadrate, wie das Quadrat ad ist;

3) Die Größe AD läßt sich in die Faktoren 1 und AD auflösen (Arithm. III. §. 87. Nro. II.), so daß $AD = 1 \times AD$, und also $1 \times DA = mn \times ad$; verwandelt man diese Gleichung in eine geometrische Proportion (Arithm. IV. §. 35. Zus. VI.), so verhält sich $1 : mn = ad : AD$, oder $ad : AD = 1 : mn$, d. h., das Quadrat ad ist im Rechtecke AD so oft enthalten, als 1 im Produkte mn.

Ist daher z. B. die Linie $AB = 5 . ab$, und $AC = 3 . ab$, so ist das Rechteck $AD = 15 . ad$, und $ad : AD = 1 : 15$, das ist, das Rechteck AD ist seinem Flächeninhalte nach 15 Quadraten ad gleich.

§. 153.

Das Maaß der Flächen.

a) Wird eine Quadratfläche von bekannter Größe angenommen, um ihr Verhältniß zu anderen Flächen, und dadurch die Größe der letzteren zu bestimmen, so nennt man die angenommene Quadratfläche das Maaß der Flächen, oder ein Flächenmaaß.

b) Eine Figur messen heißt ihr Verhältniß zum Flächenmaaße angeben, somit bestimmen, wie oft das Flächenmaaß, oder ein gewisser Theil davon gesetzt werden muß, um die Fläche zu erhalten, welche gemessen wird.

I. Zusatz: Weil gewöhnlich die eingeführten Flächenmaaße Quadratruthen, Quadratschuhe, Quadratzolle rc. genannt werden (Arithm. I. §. 80.), so wird eine Fläche gemessen, wenn man ihre Größe in Quadratruthen, Quadratschuhen, Quadratzollen rc. angibt, d. h., wenn man bestimmt, wie viele Quadratruthen, Quadratschuhe, Quadratzolle rc. eine gewisse Fläche hat.

II. Zusatz: Ein Rechteck wird gemessen, wenn man zwei Seiten, die einen Winkel einschliessen, mit einerlei Längenmaaße mißt, und die Zahlen mit einander multiplizirt (§. 152.); hat man z. B. die Linien durch Ruthen oder Fuß gemessen, so gibt das Produkt den Flächeninhalt des Rechteckes in Quadratruthen oder in Quadratschuhen an.

Daher wird (Fig. 119.) das Rechteck AD gemessen, wenn man mit dem nämlichen Längenmaaße die Linien AB und AC mißt, und die erhaltenen Zahlen mit einander multiplizirt.

III. Zusatz: Mißt (Fig. 119.) das gebrauchte Längenmaaß ab, oder die Seite des Quadrates ad die beiden Seiten AE und AM des Rechteckes AN nicht genau, und ist $AB = m . ab$, und $AC = n . ab$, so ist $AD = mn . ad$, und das Rechteck AN ist um den

außer AN liegenden Streifen größer als das Rechteck AD. Sind nun die Theile BE und CM kleiner als ab, so nimmt man von ab einen bestimmten Theil, etwa den 10ten, und mißt damit die Stücke BE und CM; geht die Messung nicht genau aus, so nimmt man wieder kleinere Theile, und bestimmt sich den überbleibenden Streifen, oder den Unterschied zwischen den Rechtecken AN und AD so genau, als man will, oder es die vorliegende Aufgabe erfordert.

Hat man auf diese Weise die Linien AE und AM gemessen, so drückt man ihre Größe durch Reduktion im nämlichen Längenmaaße aus (Arithm. I. §. 90.), und multiplizirt dann die erhaltenen Zahlen mit einander. Ist z. B. die Linie AE = 5 Fuß 8 Zoll = 5,8 Fuß, und AM = 3 Fuß 6 Zoll = 3,6 Fuß, indem im Dezimalmaaße der Zoll der 10te Theil des Fußes ist (Arithm. I. §. 79.), so ist das Rechteck AN = AE × AM = 5,8 × 3,6 = 20,88 Quadratfuß = 20 □ Fuß 88 □ Zoll (Arithm. III. §. 14.).

IV. Zusatz: Drückt B die Zahl aus, wie vielmal das gebrauchte Maaß in der Grundlinie, und A die Zahl, wie vielmal eben dieses Maaß in der Höhe des Rechteckes enthalten ist, so gibt A × B, oder A . B den Flächeninhalt des Rechteckes an; daher bedeutet die in der Anwendung bequeme Formel Rectang. = A . B eben so viel, als „das Produkt der Grundlinie in die Höhe gibt den Flächeninhalt des Rechteckes."

V. Zusatz: Wenn C die Größe der Seite eines Quadrates angibt, so bestimmt C^2 den Flächeninhalt des Quadrates; da beim Quadrate die Grundlinie B = C, und die Höhe A = C ist (§. 50. a.), und also B . A = C . C = C^2.

VI. Zusatz: Setzt man (Fig. 103.) im Quadrate AC die Länge der Seite AD = C, dann AK = a, und KD = b, so ist (Zus. V.) der Flächeninhalt des Quadrates AC = $C^2 = a^2 + 2ab + b^2$, mithin dem aufgestellten allgemeinen Quadrirungsgesetze gemäß (Arithm. IV. §. 1.), nach welchem $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Anmerkung: 1) Im §. 167. werden mehrere Beispiele

zur Berechnung des Flächeninhaltes der Figuren angeführt werden.

2) Bestimmt man nach dem III. Zusatze die Seiten des Rechteckes in verschiedenen Längenmaaßen, so kann man mittels der Dezimalbrüche bequem die vorkommenden niederen Maaße in höheren ausdrücken, und dann die Multiplikation in Dezimalen vornehmen, wie dieses in dem beim III. Zus. angeführten Beispiele geschehen ist.

3) Der im §. 152. aufgestellte Lehrsatz zeigt in Betreff der Messung der Figuren, daß man ihren Flächeninhalt dadurch bestimmt, daß man mittels der Längenmaaße gewisse Linien mißt, und die gefundenen Zahlen mit einander multiplizirt, weßhalb die Flächen nicht unmittelbar durch Flächen, sondern nur durch gewisse Linien gemessen werden; indeß ist aber das Maaß der Fläche immer wieder eine Fläche, und die Größe des Flächeninhaltes kann nur in Flächen angegeben werden.

4) Daß der beim Ausdrucke A . B zwischen A und B gesetzte Punkt die Multiplikation anzeigt, indem jeder Buchstabe die Länge einer Linie angibt, ist aus dem I. Theile der Arithmetik §. 45. f. ersichtlich.

5) Im §. 80. des I. Theiles meines arithmetischen Lehrbuches findet man die in Baiern üblichen Flächenmaaße ausführlich angeführt, und den Quadratfuß nach dem Duodezimal- und Dezimalmaaße in Tabellen abgetheilt; und in der dritten, im Jahre 1825 bei Dannheimer in Kempten erschienenen Auflage des nämlichen Theiles sind die im Königreiche Württemberg, und im Großherzogthume Baden üblichen Flächen-Maaße angeführt, während in der dritten Auflage des II. Theiles dieses arithmetischen Lehrbuches die in einigen Kantonen der Schweiz gebräuchlichen Flächen-Maaße, und im dritten arithmetischen Theile die französischen und andere Flächen-Maaße enthalten sind (§. 79. Anmerk. 3 und 4.).

§. 154.

I. Aufgabe, ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung:

Man suche zu der Grundlinie B und zur Höhe A des Rechteckes die mittlere geometrische Proportionallinie C (§. 103.), und verzeichne über C ein Quadrat (§. 51. Anm. 1.), so ist dieses das verlangte Quadrat, welches dem gegebenen Rechtecke gleich ist.

Be-

Beweis:

Wenn a, b und c die durch einerlei Maaß bestimmten Größen von *A*, B und C ausdrücken, so ist nach der Auflösung $c^2 = a \,.\, b$, ferner $c^2 = C^2$, und $a \,.\, b =$ Rectang. (§. 153. Zus. IV. u. V.), mithin ist das gefundene Quadrat dem Rechtecke gleich.

I. Zusatz: Jede geradlinigte Figur läßt sich quadriren, das ist, in ein ihr gleiches Quadrat verwandeln; indem sich alle Figuren durch Diagonalen in Dreiecke (§. 52. Zus. II. u. VII.), jedes Dreieck in ein Rechteck (§. 145. Zus.), jedes Rechteck in ein Quadrat (§. 154. Aufg.), und alle diese Quadrate in eines verwandeln lassen (§. 150.).

II. Zusatz: Der Kreis läßt sich nicht quadriren. Denn da man aus dem Durchmesser die Peripherie erst finden muß (§. 133.), das Verhältniß des Diameters zur Peripherie aber nur durch Annäherung bestimmt ist, so läßt sich auch kein dem Kreise vollkommen gleiches Dreieck (§. 132. Zus. I.), mithin auch kein ihm gleiches Quadrat konstruiren.

Anmerkung: Man machte bisher auch auf dem Wege der Vermessung Versuche, das Verhältniß des Diameters zur Peripherie genau zu bestimmen, und darnach den Kreis zu quadriren; es gibt aber die Vermessung, wenn sie auch mit der größten Sorgfalt vorgenommen wird, kein genaues Resultat, und es läßt sich aus der gemessenen Peripherie, und aus dem gemessenen Durchmesser eines Kreises unmöglich das Verhältniß dieser zwei Größen zu einander ganz genau angeben.

§. 155.

II. Aufgabe, den Flächeninhalt eines schiefen Parallelogrammes zu bestimmen.

Auflösung:

Man messe die Grundlinie und Höhe mit dem nämlichen Längenmaaße, und multiplizire die Zahlen, welche die Größe dieser Linien angeben, mit einander, es gibt das Produkt den Flächeninhalt, das ist,

$$\text{Parallelogramm} = B \,.\, A.$$

Beweis:

1) Ein Rechteck ist dem Flächeninhalte nach dem schiefen Parallelogramme gleich, wenn es damit die nämliche Grundlinie und Höhe hat, indem es ebenfalls ein Parallelogramm ist (§. 48. a.), und Parallelogramme von gleichen Höhen und Grundlinien einander gleich sind (§. 139. Zus.);

2) Nun erhält man aber den Flächeninhalt eines Rechteckes, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplizirt (§. 153. Zus. IV.); also wird auch das schiefe Parallelogramm gemessen, wenn man die Grundlinie und Höhe mit einerlei Maaß mißt, und diese beiden Zahlen mit einander multiplizirt.

I. Zusatz: Parallelogramme stehen im zusammengesetzten geraden Verhältnisse mit ihren Grundlinien und Höhen.

Denn drückt man die Grundlinie und Höhe des einen Parallelogrammes durch B und A, und die des anderen durch b und a aus, so ist nach der vorstehenden Auflösung:

PARALL. = B . A,
und parall. = b . a, also (Arithm. II. §. 50. d.)

PARALL. : parall. = B . A : b . a.

Es sind daher die Parallelogramme mit ihren Grundlinien und Höhen im zusammengesetzten geraden Verhältnisse (Arithm. IV. §. 44. Zus. II.).

II. Zusatz: Parallelogramme von gleichen Grundlinien sind mit ihren Höhen, und bei gleichen Höhen mit ihren Grundlinien gerade proportionirt. Denn

PAR. : par. = B . A : b . a (Zus. I.)
= A : a, wenn B = b }
= B : b, wenn A = a } (Arithm. IV. §. 41.).

III. Zusatz: Bei gleichen Parallelogrammen sind die Grundlinien mit den Höhen umgekehrt proportionirt. Denn PAR. = B . A, und par. = b . a, also, wenn PAR. = par., ist B . A = b . a, und B : b = a : A, d. h., die Grundlinien sind in dieser Voraussetzung mit den Höhen umgekehrt proportionirt (Arithm. IV. §. 35. Zus. VI., und II. §. 60.).

§. 156.

III. Aufgabe, den Flächeninhalt eines Dreieckes zu finden.

Auflösung:

Man messe die Grundlinie und Höhe mit einerlei Maaß, multiplizire die beiden erhaltenen Zahlen mit einander, und dividire das Produkt durch 2; das heißt, es ist

$$\triangle = \frac{B \cdot A}{2} = \tfrac{1}{2}B \cdot A = \tfrac{1}{2}A \cdot B.$$

Beweis:

Das Produkt $B \cdot A$ gibt den Flächeninhalt eines Parallelogrammes, welches mit dem Dreiecke die nämliche Grundlinie B, und die nämliche Höhe A hat (§. 155.); nun ist aber das Dreieck die Hälfte eines solchen Parallelogrammes (§. 143.), folglich gibt die Hälfte dieses Produktes, oder $\frac{B \cdot A}{2}$ den Flächeninhalt des Dreieckes.

I. Zusatz: Man findet den Inhalt eines in den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes, wenn man den Perimeter, und die Entfernung einer Seite vom Mittelpunkte des Kreises mit dem nämlichen Längenmaaße mißt, und das Produkt der erhaltenen Zahlen mit 2 dividirt; indem ein solches reguläres Vieleck einem Dreiecke gleich ist, das den Perimeter zur Basis, und den Abstand einer Seite vom Zentrum zur Höhe hat (§. 151.).

II. Zusatz: Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem halben Produkte aus der Peripherie in den Radius (§. 151. Zus.)

Drückt man den Flächeninhalt des Kreises durch c, den Durchmesser durch d, und den Radius durch r aus, so ist $c = p \times \tfrac{1}{2}r = 2r\pi \times \tfrac{1}{2}r$ (§. 133. Zus. I.) $= r^2\pi$; ferner $r = \tfrac{1}{2}d$ (§. 14. Zus. III.),

also $r^2 = \frac{1}{4}d^2$, und die Kreisfläche, oder $C = \frac{1}{4}d^2\pi = \frac{1}{4}\pi \cdot d^2$.

III. Zusatz: Aus der bekannten Kreisfläche kann man in der Gleichung $C = r^2\pi$ den Radius, und in der Gleichung $C = \frac{1}{4}d^2\pi$ den Durchmesser des Kreises berechnen; es ist $r = \sqrt{\frac{C}{\pi}}$, und $d = \sqrt{\frac{4C}{\pi}}$ (Arithm. IV. §. 20.).

IV. Zusatz: Man erhält den Flächeninhalt des Ausschnittes oder Sektors eines Kreises (§. 59. c.), wenn man den Bogen des Sektors mit dem halben Radius des Kreises multiplizirt, das ist, Sector = Arc. $\times \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}r$. Arc.

Wenn man (Fig. 61.) den Radius AC = r, dann den Bogen ADB = Arc., und den Sektor ACBD = Sect. setzet, so verhält sich

Sect. : Circ. = Arc. : p,

oder Sect. : $r^2\pi$ = Arc. : $2r\pi$ (Zus. II. u. §. 133. Z. I.),
also Sect. : r = Arc. : 2 (Arithm. IV. §. 41.),

und $\text{Sect.} = \frac{\text{Arc.} \times r}{2} = \text{Arc.} \times \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}r \cdot \text{Arc.}$ (Arithm. IV. §. 36.).

V. Zusatz: Man erhält den Flächeninhalt des Segmentes (§. 59. d.), wenn man von dem entsprechenden Sektor das durch die Radien und die Sehne des Ausschnittes begränzte Dreieck subtrahirt; das ist (Fig. 61.), der Abschnitt oder Segm. ABD = Sect. ACBD — △ ACB.

VI. Zusatz: Den Flächeninhalt des zwischen zwei Kreisen enthaltenen Ringes erhält man, wenn man die Verhältnißzahl π mit der Differenz der Quadrate der Radien multiplizirt.

Drückt man (Fig. 17.) den Radius des größeren Kreises durch R, und den des kleineren Kreises durch r aus, so ist offenbar der zwischen den Peripherien beider Kreise enthaltene Ring oder Annulus $= R^2\pi - r^2\pi = \pi(R^2 - r^2)$; indem hier die Produkte in

Faktoren aufgelöset werden (Arithm. III. §. 87. IV.), und man den Ring erhält, wenn man die kleinere Zirkelfläche von der größeren abzieht.

VII. Zusatz: Zwei Dreiecke stehen im zusammengesetzten geraden Verhältnisse mit ihren Grundlinien und Höhen, und bei gleichen Grundlinien sind dieselben mit den Höhen, und bei gleichen Höhen sind sie mit den Grundlinien gerade proportionirt; überdieß sind bei gleichen Dreiecken die Grundlinien mit den Höhen umgekehrt proportionirt. Denn alle diese Verhältnisse gelten von Parallelogrammen (§. 155. Zus. I — III.), also auch von ihren Hälften, den Dreiecken.

VIII. Zusatz: In der Gleichung $\triangle = \frac{B \cdot A}{2}$, welche den Flächeninhalt des Dreieckes angibt, kann man aus dem Flächeninhalte und der Grundlinie die Höhe, und aus dem Flächeninhalte und der Höhe die Grundlinie berechnen; es ist $A = \frac{2\triangle}{B}$, und $B = \frac{2\triangle}{A}$ (Arithm. III. §. 98.).

§. 157.

IV. Aufgabe, den Flächeninhalt eines Trapezes zu bestimmen.

Auflösung:

1) Man messe die beiden parallelen Seiten, und ihren Abstand oder die Höhe mit einerlei Maaß, multiplizire die Summe der beiden ersten Zahlen mit der letzten, und dividire das Produkt durch 2, das ist,

$$\text{Trapez} = (B + b) \times \tfrac{1}{2}A.$$

Beweis:

1) Man ziehe (Fig. 120.) die Diagonal BD, so ist das Perpendikel BE, das den Abstand der Parallelen von einander bestimmt, die gemeinschaftliche Höhe der beiden Dreiecke ABD und BCD (§. 41. Zus. V.);

2) Mißt man mit dem nämlichen Maaße die Grundlinien *A*D und *B*C, und die Höhe BE, und bezeichnen die Buchstaben B, b und *A* die Größe dieser Linien in Zahlen, so ist nach §. 156.

$$\triangle\ ABD = B \times \tfrac{1}{2}A,$$
$$\text{und}\ \triangle\ BCD = b \times \tfrac{1}{2}A,$$

$$\text{also}\ \triangle\ ABD + \triangle\ BCD = B \times \tfrac{1}{2}A + b \times \tfrac{1}{2}A,$$
$$\text{und Trapez. } AC = (B + b) \times \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}(B + b)A$$
$$= \frac{(B + b)A}{2}$$ (Arithm. III. §. 53. Lehrs. VI.).

§. 158.

V. Aufgabe, den Flächeninhalt einer jeden geradlinigten Figur, wenn sie kein Dreieck ist, zu finden.

I. Auflösung:

Man theile die Figur durch Diagonalen in lauter Dreiecke (Fig. 56. u. 57.), bestimme nach §. 156. den Flächeninhalt eines jeden einzelnen Dreieckes, es gibt ihre Summe den Inhalt der ganzen Figur.

II. Auflösung:

Man theile die Figur in Trapezen (§. 147.), und suche den Inhalt eines jeden einzelnen Trapezes (§. 157.), es gibt ihre Summe den Flächeninhalt der ganzen Figur.

III. Auflösung:

1) Man theile die Figur in Trapezen (§. 147.), und bezeichne der Kürze wegen (Fig. 114.) die gemessene Länge von BB mit B, von CC mit C, von *DD* mit *D* ꝛc. das ist, die Länge jeder Parallele mit dem Buchstaben der Ecke, durch welche sie gezogen ist;

2) Eben so bezeichne man die mit dem nämlichen Maaße bestimmte Länge der Höhe ab vom ersten Trapeze und Dreiecke mit dem einzelnen Buchstaben b, die Länge ac mit c, dann ad mit d ꝛc.

3) Nun subtrahire man von der ersten Parallele die dritte, von der zweiten die vierte, von der dritten die fünfte ꝛc., bis man alle auf diese Weise möglichen Reste erhält; den ersten Rest multiplizire man mit dem Abstande der ersten und zweiten Parallele, den zweiten Rest mit dem Abstande der ersten und dritten Parallele ꝛc. Zur Summe aller dieser Produkte addire man das Produkt aus der Summe der beiden letzten Parallelen in den Abstand der letzten von der ersten Parallele; endlich halbire man alle erhaltenen Produkte, es gibt der Quotient den gesuchten Flächeninhalt, das ist:

$$\text{Polyg.} = [(A - C)b + (B - D)c + (C - E)d + (D - F)e + (E - G)f + (F + G)g] : 2.$$

Beweis:

1) Da alle gezogenen Parallelen als rechtwinklichte Ordinaten auf AG senkrecht stehen, so ist $ab = b$ die Höhe vom ersten Trapeze, oder, weil in dieser Figur $A = 0$ ist, die Höhe vom Dreiecke BAB; dann $bc = c - b$ ist die Höhe vom zweiten Trapeze CBBC, ferner $cd = d - c$ die Höhe vom dritten ꝛc.;

2) Mithin ist $\triangle$ BAB $= B \,.\, \frac{1}{2}b$ (§. 156.) $= (A + B)\frac{1}{2}b$, wenn man dieses Dreieck als ein Trapez betrachtet, dessen kleinere Parallele A Null ist (§. 157.);

3) Ferner Trap. CBBC $= (B + C) \times \frac{1}{2}(c - b)$, und so fortgesetzt; folglich ist

$$\text{Polyg.} = [(A + B)b + (B + C)(c - b) + (C + D)(d - c) + (D + E)(e - d) + (E + F)(f - e) + (F + G)(g - f)] : 2$$

$$= [Ab + Bb + Bc + Cc - Bb - Cb + Cd + Dd - Cc - Dc + De + Ee - Dd - Ed + Ef + Ff - Ee - Fe + Fg + Gg - Ff - Gf] : 2$$

$$= [Ab - Cb + Bc - Dc + Cd - Ed + De - Fe + Ef - Gf + Fg + Gg] : 2$$

$$= [(A - C)b + (B - D)c + (C - E)d + (D - F)e + (E - G)f + (F + G)g] : 2.$$

Beispiel:

Wenn (Fig. 114.)

$a = 0,\quad A = 0,$
$b = 57,\quad B = 123,$
$c = 74,\quad C = 135,$
$d = 92,\quad D = 120,$
$e = 125,\quad E = 155,$
$f = 169,\quad F = 100,$
$g = 195;\quad G = 0;$ so ist

$(A-C)b$	$= -135$	$\times 57$	$= +$	.....	-7695
$(B-D)c$	$= +3$	$\times 74$	$= +$	222	$-$ ....
$(C-E)d$	$= -20$	$\times 92$	$= +$	.....	-1840
$(D-F)e$	$= +20$	$\times 125$	$= +$	2500	$-$ ....
$(E-G)f$	$= +155$	$\times 169$	$= +$	26195	$-$ ....
$(F+G)g$	$= +100$	$\times 195$	$= +$	19500	$-$ ....
			Summa $=$	48417	-9535

Folglich Polyg. $= 38882 : 2 = 19441$

Anmerkung: 1) Hat man alle diese Linien, die mit dem nämlichen Längenmaaße gemessen werden, in Schuhen bestimmt, so beträgt der Flächeninhalt dieser Figur 19441 Quadratfuß.

2) Die arithmetischen Veränderungen, welche beim vorstehenden Beweise vorkommen, findet man im III. Theile meines Lehrbuches der Arithmetik begründet, indem hier zusammengesetzte Größen mit einander multiplizirt (Arithm. III. §. 58.), gleiche entgegengesetzte Größen aufgehoben (Arithm. III. §. 45. Lehrs. I.), und die Produkte in Faktoren aufgelös't wurden (Arithm. III. §. 87. Nro. IV.), während die ganze Summe mit 2 dividirt wurde, anstatt alle einzelnen Summanden damit zu dividiren (Arithm. III. §. 53. Lehrs. I.).

3) Wie der Flächeninhalt einer krummlinigten Figur zu finden ist, wird in der praktischen Geometrie gezeigt werden.

§. 159.

VI. Aufgabe, ein Parallelogramm in eine beliebige Anzahl ungleicher Theile zu theilen, die ein bestimmtes Verhältniß zu einander haben.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 121.) das Parallelogramm AC in drei Theile zu theilen, die sich zu einander verhalten, wie die Zahlen 1, dann 3, und 4;

2) Man theile eine Seite AD nach dem angegebenen Verhältnisse (§. 87.), nämlich so, daß

$$Am : mn = 1 : 3,$$
dann $Am : nD = 1 : 4$,
und $mn : nD = 3 : 4$;

3) Durch die Theilungspunkte m und n ziehe man mit der anliegenden Seite AB die Parallelen mp und ng (§. 39.); es sind die dadurch erhaltenen Parallelogramme Ap, mq und nC die drei verlangten Theile, die sich verhalten, wie 1, dann 3 und 4.

Beweis:

Diese drei Parallelogramme haben gleiche Höhen (§. 41. Zus. V.), daher verhält sich nach Nro. 2. der Auflösung (§. 155. Zus. II.)

$$\square Ap : \square mq = Am : mn = 1 : 3,$$
dann $\square Ap : \square nC = Am : nD = 1 : 4$,
und $\square mq : \square nC = mn : nD = 3 : 4$.

§. 160.

VII. Aufgabe, ein Dreieck in eine beliebige Anzahl ungleicher Theile zu theilen, die ein bestimmtes Verhältniß zu einander haben.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 122.) das Dreieck ABC in drei Teile zu theilen, die sich zu einander verhalten, wie die Zahlen 3, dann 4, und 5;

2) Man theile eine Seite AC, die man als Grundlinie annimmt, nach dem bestimmten Verhältnisse in drei Theile (§. 87.), nämlich, daß

AD : DE = 3 : 4,
dann AD : EC = 3 : 5,
und DE : EC = 4 : 5;

3) Durch die Theilungspunkte D und E ziehe man zur Spitze B die geraden Linien BD und BE, so bekommt man die verlangten drei Theile nach dem bestimmten Verhältnisse.

Beweis:

Die drei erhaltenen Dreiecke ABD, BDE und EBC haben die nämliche Höhe (§. 33. Zus. IV.), daher verhält sich (§. 156. Zus. VII.)

$\triangle$ ABD : $\triangle$ BDE = AD : DE = 3 : 4,
dann $\triangle$ ABD : $\triangle$ EBC = AD : EC = 3 : 5,
und $\triangle$ DBE : $\triangle$ EBC = DE : EC = 4 : 5.

§. 161.

VIII. Aufgabe, eine jede geradlinigte Figur in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung:

1) Man suche (Fig. 123.) nach den vorhergehenden Auflösungen den Flächeninhalt der ganzen Figur, und dividire diesen durch die gegebene Anzahl der Theile, so drückt der Quotient die Größe P eines jeden Theiles aus;

2) Nun suche man den Flächeninhalt des äußersten Dreieckes BCD in der Figur, und vergleiche dessen Größe mit der Fläche P, welche die Größe eines jeden Theiles angibt; es kann das Dreieck BCD eben so groß, oder kleiner, oder größer als der Theil P sein;

3) Ist das Dreieck BCD = P, so ist das Dreieck ein verlangter Theil der Figur;

4) Ist aber das Dreieck BCD < P, so subtrahire

man den Inhalt des Dreieckes von P, und betrachte den Unterschied D, welcher $= P - \triangle BCD$, als den Flächeninhalt eines Dreieckes, das die Linie BD zur Grundlinie hat, und suche die entsprechende Höhe (§. 156. Zus. VIII.);

5) Auf BD errichte man im Viereck BAED ein Perpendikel (§. 32.), und mache es von so einer Länge $= qr$, daß es der eben gefundenen Höhe gleich ist;

6) Durch r ziehe man mit BD die Parallele st (§. 39.), und die gerade Linie Bt, oder Ds; so haben beide Dreiecke BDs und BDt einerlei Höhe qr (§. 41. Zus. V.), und ihr Flächeninhalt ist dem bei Nro. 3. bestimmten Unterschiede D gleich, folglich ist $\triangle BCD + \triangle BDs = \triangle BCD + \triangle BDt = P$, und das Viereck BCDs oder BCDt ist ein verlangter Theil;

7) Ist endlich $\triangle BCD > P$, so subtrahire man P vom $\triangle BCD$, und bestimme, wie vorhin bei Nro. 4, 5 und 6., im Dreiecke BCD das Dreieck BmD und Bnd; es sind diese beiden Dreiecke einander gleich (§. 143. Zus. I.), jedes ist so groß, wie der gefundene Unterschied, welcher $= \triangle BCD - P$, und $\triangle mCD = \triangle BCn = P$;

8) Auf eine ähnliche Art lassen sich die übrigen Theile bestimmen.

§. 162.

IX. Aufgabe, eine geradlinigte Figur in eine gegebene Anzahl ungleicher Theile nach einem bestimmten Verhältnisse zu theilen.

Auflösung:

1) Man suche den ganzen Flächeninhalt der Figur, und berechne die Größe der einzelnen Theile nach dem bestimmten Verhältnisse (Arithm. IV. §. 40.);

2) Die gefundenen einzelnen Theile konstruire man nach der Vorschrift des §. 161.

§. 163.

II. Lehrsatz:

Aehnliche Dreiecke sind mit den Quadraten homologer Seiten oder Höhen gerade proportionirt.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 82.) die ähnlichen Dreiecke ABC und abc gegeben, und BD und bd seien homologe Höhen, das ist, solche, welche von gleichen Winkeln aus gezogen sind;

2) Die Dreiecke stehen mit ihren Grundlinien und Höhen im zusammengesetzten geraden Verhältnisse (§. 156. Zus. VII.), daher verhält sich

$$\triangle ABC : \triangle abc = AC \times BD : ac \times bd;$$

3) Nach §. 99. verhält sich

$$AC : ac = BD : bd,$$

also $AC^2 : ac^2 = BD^2 : bd^2$ (Arithm. IV. §. 42.);

4) Ferner verhält sich

$$AC : ac = AC : ac,$$

dann $AC : ac = BD : bd$, also (Arithm. IV. §. 44.)

$$AC^2 : ac^2 = AC \times BD : ac \times bd;$$

folglich auch nach Nro. 2.

$$\triangle ABC : \triangle abc = AC^2 : ac^2;$$

5) Endlich verhält sich nach Nro. 3. und vermöge des IV. Theiles der Arithmetik. §. 42.

$$AC^2 : ac^2 = BD^2 : bd^2;$$

mithin auch $\triangle ABC : \triangle abc = BD^2 : bd^2$.

§. 164.

III. Lehrsatz:

Aehnliche geradlinigte Figuren sind mit den Quadraten homologer Seiten oder homologer Diagonalen gerade proportionirt.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 78.) die beiden ähnlichen Sie-

benecke gegeben, und man theile sie von den Ecken A und a aus durch homologe Diagonalen in Dreiecke, die der Ordnung nach einander ähnlich sind (§. 100.);

2) Daher verhält sich

$\triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2$ (§. 163.),
$\triangle ACD : \triangle acd = AC^2 : ac^2 = AD^2 : ad^2$,
$\triangle ADE : \triangle ade = AD^2 : ad^2 = AE^2 : ae^2$,
$\triangle AEF : \triangle aef = AE^2 : ae^2 = AF^2 : af^2$,
$\triangle AFG : \triangle afg = AF^2 : af^2 = AB^2 : ab^2$,

also verhalten sich die Dreiecke (Arithm. IV. §. 39. Zus. II.)

$$(ABC + ACD + ADE + AEF + AFG) : (abc + acd + ade + aef + afg) = \triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2 = Ac^2 : ac^2 \text{ ꝛc.},$$

indem alle vorstehenden Verhältnisse einander gleich sind;

3) Folglich verhalten sich diese ähnlichen Figuren wie die Quadrate homologer Seiten oder Diagonalen, das ist,

$$ABCDEFG : abcdefg = AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2.$$

§. 165.

IV. Lehrsatz:

Zwei Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Diameter oder Halbmesser.

Beweis:

1) Man drücke die beiden Kreisflächen durch C und c, ihre Durchmesser durch D und d, und ihre Halbmesser durch R und r aus;

2) Nach §. 156. Zus. II. ist die Kreisfläche C $= \frac{1}{4}D^2\pi = R^2\pi$, und $c = \frac{1}{4}d^2\pi = r^2\pi$, und daher verhält sich (Arithm. II. §. 50. d.)

$$C : c = \tfrac{1}{4}D^2\pi : \tfrac{1}{4}d^2\pi = R^2\pi : r^2\pi = D^2 : d^2 = R^2 : r^2$$

(Arithm. IV. §. 41.).

§. 166.

Den im §. 148. aufgestellten pythagorischen Lehrsatz betreffend.

Aus dem Lehrsatze, daß sich ähnliche Figuren wie

die Quadrate homologer Seiten verhalten (§. 164.), läßt sich auf nachstehende Weise ein neuer Beweis für den im §. 148. aufgestellten Lehrsatz anführen:

1) Errichtet man (Fig. 116.) über die drei Seiten des rechtwinklichten Dreieckes ABC Quadrate, und drückt man sie durch AC^q, AB^q, und BC^q aus, so sind diese regulären Vierecke einander ähnlich (§. 90. Zus. IV.), mithin verhält sich nach §. 164.

$AB^q : BC^q = AB^2 : BC^2$, und daher

$AB^q + BC^q : AB^q = AB^2 + BC^2 : AB^2$ (Arithm. IV. §. 39. Zus. I.), eben so ist

$AB^q : AC^q = AB^2 : AC^2$, also

$AB^q + BC^q : AC^q = AB^2 + BC^2 : AC^2$ (Arithm. IV. §. 43. Nro. 2.).

2) Nun ist $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (§. 97.), also auch $AB^q + BC^q = AC^q$ (Arithm. IV. §. 35. Zus. II.), oder $AC^q = AB^q + BC^q$.

§. 167.

Beispiele zur Uibung in der Bestimmung des Flächeninhaltes der Figuren.

Man bestimme den Flächeninhalt folgender Figuren:

a) Eines Rechteckes, oder überhaupt eines Parallelogrammes, dessen Grundlinie 450,8, und dessen Höhe 36,6 Schuh beträgt;

b) Eines Quadrates, dessen Seite 436 Fuß hält;

c) Eines Dreieckes, dessen Grundlinie 650, und dessen Höhe 30 Schuh hält;

d) Eines Kreises, dessen Durchmesser 86,9 Schuh hält;

e) Eines Trapezes, bei dem die eine Parallele 136,4, die andere 94,6, und die Höhe 18,5 Schuh beträgt:

f) Endlich eines Viereckes, bei dem die gemeinschaftliche Grundlinie der beiden Dreiecke 76 Schuh, und die Höhe des einen Dreieckes 36,8, und die des anderen 24,5 Fuß beträgt.

Auflösung:

a) Nach dem §. 153. Zus. IV. u. §. 155. ist das Rechteck und das Parallelogramm $= B . A$, daher $= 450,8 \times 36,6 = 16499,28$ Quadratfuß (Arithm. III. §. 14.), das ist, der Flächeninhalt eines solchen Rechteckes oder Parallelogrammes beträgt im Dezimalmaaße 164 □ Ruthen, 99 □ Fuß und 28 □ Zoll (Arithm. I. §. 80.).

b) Nach §. 153. Zus. V. ist das Quadrat $= C^2$, daher $= 436^2 = 436 \times 436 = 190096$ □ Fuß $= 4$ Tagwerk, 300 □ Ruthen und 96 □ Schuh (Arithm. I. §. 80.).

c) Nach §. 156. ist $\triangle = \frac{B . A}{2}$, also $= \frac{650 \times 30}{2}$ $= 325 \times 30 = 9750$ □ Fuß $= 97$ □ Ruthen und 50 □ Fuß.

d) Nach §. 156. Zus. II. ist die Kreisfläche C $= \frac{1}{4}\pi d^2$, also $= 0,7854 \times 86,9^2 = 0,7854 \times 7551,61$ $= 5931,03 \ldots$ □ Fuß, mithin beinahe $= 59$ □ Ruthen, 31 □ Fuß und 3 □ Zoll.

e) Nach §. 157. ist das Trapez $= (B + b) \times \frac{1}{2}A$ $= (136,4 + 94,6) \times \frac{18,5}{2} = 2136,75$ □ Fuß $= 21$ □ Ruthen, 36 □ Fuß und 75 □ Zoll.

f) Endlich ist nach §. 158. das Viereck $= \left(\frac{B . A}{2} + \frac{B . a}{2}\right) = \frac{1}{2}B(A + a)$, also $= \frac{76}{2}(36,8 + 24,5)$ $= 38 \times 61,3 = 2329,4$ □ Fuß $= 23$ □ Ruthen, 29 □ Fuß und 40 □ Zoll.

Anmerkung: 1) In Absicht auf geradlinigte Figuren, im Falle sie durch Perpendikel nach einer angenommenen Basis in Trapezen getheilt werden, ist im §. 158. bei der III. Auflösung schon ein Beispiel angeführt worden.

2) In dem bei d. angeführten Beispiele kann die Kreisfläche, welche $= \frac{1}{4}\pi d^2$ ist, mittels der Logarithmen auf folgende Weise gefunden werden:

Log. d = Log. 86,9 = 1,9390198
$\times 2$

also Log. d^2 = 3,8780396 (Arithm. IV. §. 58.),
ferner Log. $\frac{1}{4}\pi$ = 0,8950899 — 1 (§. 132. Zus. I. c.),
mithin Log. C = 3,7731295 (Arithm. IV. §. 56.)
= Log. 5931,021, weßhalb die Kreisfläche beinahe = 5931,021 □ Fuß = 59 □ Ruthen, 31 □ Fuß, 2 □ Zoll und 10 □ Linien.

3) In den vorstehenden Beispielen wurde der Flächeninhalt der genannten Figuren nach dem baierischen Flächen-Maaße bestimmt (Arithm. I. §. 80.). In der dritten Auflage des ersten und zweiten Theiles, und in den bis jetzt erschienenen drei Auflagen des dritten Theiles meines Lehrbuches der Arithmetik findet man nebst den Längen- und Flächen-Maaßen einiger Schweizer-Kantone auch die französischen, und die königl. württembergischen, und großherzogl. badischen Längen- und Flächen-Maaße, und zugleich die Verhältnisse von Längen- und Flächen-Maaßen verschiedener Länder und Städte, damit man den Flächen-Inhalt der Figuren, und die zu ihrer Berechnung benöthigten Längen auch in ausländischen Maaßen angeben, und die gefundenen Flächen von bestimmten Maaßen auf andere Maaße reduziren kann (§. 79. Anmerk. 3 und 4., und §. 153. Anmerk. 5.)

III. Hauptstück.

Von der Lage gerader Linien gegen Ebenen, und verschiedener Ebenen gegen einander.

---

§. 168.

Grundsätze.

a) Eine gerade Linie, die einen Punkt über, und einen Punkt unter einer Ebene hat, durchschneidet dieselbe wenigstens in einem Punkte.

b) Durch drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, ist die Lage einer Ebene bestimmt.

c) Zwei Ebenen, welche zusammen stoßen, haben verlängert mehrere Punkte gemein.

I. Zusatz: Eine gerade Linie kann eine Ebene nur in einem Punkte schneiden; denn hätte die gerade Linie mit der Ebene zwei Punkte gemein, so würde sie ganz in dieser Ebene liegen (§. 4. Zus.).

II. Zusatz: Wenn zwei Ebenen zusammen stoßen, so durchschneiden sie sich in einer geraden Linie. Denn (Fig. 124.) man nehme in den beiden zusammenstoßenden Ebenen LM und BC zwei Punkte A und B an, welche beiden Ebenen gemein sind (Grunds. c.), und ziehe die gerade Linie AB, so liegt diese in beiden Ebenen (§. 4. Zus.), und ist deßhalb die Durchschnittslinie der Ebenen LM und BC, das ist, in dieser geraden Linie schneiden sich die beiden Ebenen.

§. 169.

Senkrechte, schiefe, und parallele Linien in Beziehung auf Ebenen.

a) Eine gerade Linie steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie mit allen Linien, die in der Ebene durch ihren Durchschnittspunkt möglich sind,

rechte Winkel bildet; daher ist (Fig. 125.) die Linie AB auf der Ebene LM senkrecht, wenn AB auf alle Linien, die in der Ebene durch den Durchschnittspunkt B möglich sind, somit auf CD, GH, EF 2c. senkrecht steht (§. 8. d.)

b) Eine gerade Linie steht auf einer Ebene schief, wenn sie nicht darauf senkrecht steht; deßhalb steht (Fig. 124.) die Linie EF auf der Ebene LM schief.

c) Gerade Linien, die wie immer verlängert eine Ebene nie durchschneiden, sind zu ihr parallel; wie (Fig. 134.) die Linien AC und EB.

I. Zusatz: Wenn zwei Ebenen sich schneiden, so kann eine gerade Linie, welche durch einen Punkt ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie geht, nicht auf beiden Ebenen zugleich senkrecht stehen.

Denn man ziehe (Fig. 124.) in der Ebene LM durch den Berührungspunkt F der Linie GF die eine gerade Linie FH, welche mit AB einen beliebigen Winkel bildet, und lege durch die drei Punkte G, F und H die Ebene GFH (§. 168. Grundſ. b.), so stoßt diese mit der Ebene BC in F zusammen, und schneidet sie also in einer geraden Linie FE (§. 168. Zus. II.); stände nun GF auf beiden Ebenen LM und BC zugleich senkrecht, so müßte jeder der Winkel GFE und GFH ein rechter Winkel sein, und es gäbe in der Ebene GFH durch den Punkt F auf FG zwei Perpendikel FE und FH, was nicht möglich ist (§. 32. Zus. II.), daher kann die gerade Linie FG am gemeinschaftlichen Punkte F nicht zugleich auf die beiden, sich schneidenden Ebenen LM und BC senkrecht stehen.

II. Zusatz: Eben so kann eine gerade Linie, die nicht durch einen gemeinschaftlichen Punkt der beiden, sich schneidenden Ebenen geht, nicht zugleich auf beiden Ebenen senkrecht stehen.

Denn man ziehe (Fig. 124.) vom Berührungspunkte Q der Linie EQ zu einem beliebigen Punkte F

der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie AB die gerade Linie QF in der Ebene LM, und nach dem nämlichen Punkte F in der Ebene BC vom Punkte E der Linie EQ die gerade Linie EF, so erhält man das Dreieck EFQ; steht nun EQ auf der Ebene LM senkrecht, so ist der Winkel EQF ein rechter Winkel, mithin ist der Winkel FEQ spitzig (§. 29. Zus.), und die Linie QE steht auf der Ebene BC schief, das ist, die gerade Linie EQ kann auch in diesem Falle auf die beiden, sich schneidenden Ebenen nicht zugleich senkrecht stehen.

III. Zusatz: Da also eine gerade Linie, sie mag durch einen Punkt der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie gehen, oder nicht, auf den beiden Ebenen, die sich schneiden, nicht zugleich senkrecht stehen kann, so kann überhaupt eine gerade Linie nicht auf zwei, sich schneidende Ebenen zugleich senkrecht stehen.

IV. Zusatz: Eine gerade Linie kann durch einen Punkt nicht zugleich auf zwei Ebenen senkrecht sein; denn da dieser Punkt beiden Ebenen gemeinschaftlich ist, so stoßen die Ebenen zusammen, und durchschneiden verlängert einander (§. 168. Zus. II.), folglich kann auf ihnen die gerade Linie nicht zugleich senkrecht stehen (Zus. III.).

§. 170.

I. Lehrsatz:

Wenn eine gerade Linie auf zwei gerade Linien, welche indirekte zusammen stoßen, in einer Ebene an ihrem Durchschnittspunkte perpendikulär steht, so ist sie auf der Ebene selbst senkrecht.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 125.) in der Ebene LM die beiden Linien BC und BE gegeben, die zusammen keinen geraden Winkel bilden (§. 7. Zus. I. und Anmerk. 1.), und auf welche im Durchschnittspunkte B die gerade Linie AB senkrecht steht;

2) Man verlängere gegen B hin die Linien BC und BE, und mache BF = BE, und BD = BC;

3) Durch den Berührungspunkt B ziehe man eine beliebige gerade Linie in der Ebene LM, etwa GH zwischen den Schenkeln BE und BC, so wird diese durch die geraden Linien EC und DF geschnitten, welche von E zu C, und von D zu F gezogen werden;

4) Vom Punkte A ziehe man zu den Punkten C, G und E, und zu F, H und D die geraden Linien AC, AG, AE, AF, AH und AD, es entstehen dadurch mehrere kongruente Dreiecke; nämlich:

5) Das Dreieck CBE ≌ △ FBD (§. 20.), weil BE = BF, dann BC = BD (Nro. 2.), und der Scheitelwinkel CBE = FBD (§. 10. Zus. III.);

6) Das Dreieck BGE ≌ △ BFH (§. 22.), weil nach Nro. 5. der Winkel CEB oder GEB = BFH (§. 18. Zus. IV.), dann GBE = FBH (§. 10. Zus. III.), und BE = BF (Nro. 2.);

7) Das Dreieck ABE ≌ △ ABF (§. 20.), weil BE = BF, dann AB = AB, und ABE = ABF = 90 Grad (Nro. 1);

8) Das Dreieck ABC ≌ △ ABD, weil BC = BD (Nro. 2.), dann AB = AB, und ABC = ABD = 90 Grad (Nro. 1.);

9) Das Dreieck ACE ≌ △ AFD (§. 24.), weil CE = FD (Nro. 5.), dann AC = AD (Nro. 8.), und AE = AF (Nro. 7.);

10) Das Dreieck AGE ≌ △ AHF (§. 20.), weil AE = AF (Nro. 7.), dann GE = HF (Nro. 6.), und der Winkel AEG = AFH (Nro. 9.);

11) Endlich ist △ ABG ≌ △ ABH (§. 24.), weil AB = AB, dann BG = BH (Nro. 6.), und AG = AH (Nro. 10.);

12) In den kongruenten Dreiecken ABG und ABH sind die Winkel ABG und ABH einander gleich (§. 18. Zus. IV.), und sie sind Nebenwinkel (§. 8. a.),

daher ist jeder davon ein rechter Winkel, und AB steht auf GH senkrecht (§. 8. c. u. d.).

Nun ist aber die Linie GH durch den Punkt B beliebig in der Ebene LM gezogen, was von ihr erwiesen ist, gilt von allen übrigen Linien, die in dieser Ebene durch den Punkt *B* möglich sind, es steht also die gerade Linie AB auf jeder Linie, die man durch B in der Ebene LM ziehen kann, senkrecht, folglich auf der Ebene selbst (§. 169. a.), wenn A*B* auf die zwei Linien BE und BC, oder auf EF und CD senkrecht steht.

§. 171.

II. Lehrsatz:

Drei gerade Linien, die in einem Punkte zusammen stoßen, durch welchen eine vierte gerade Linie auf ihnen senkrecht steht, liegen in der nämlichen Ebene.

Beweis:

1) Man setze (Fig. 126.), es stoßen die Linien BC, BE und BD im Punkte B zusammen, und durch diesen Punkt sei auf sie die Linie AB senkrecht;

2) Durch die Punkte C, B und E (§. 168. b.), oder durch die beiden Linien BC und BE lege man die Ebene LM, so muß *BD* in dieser Ebene liegen;

3) Wäre *BD* nicht in dieser Ebene, sondern z. B. über derselben, so lege man durch A, B und D die Ebene *B*G, so wird diese die Ebene LM in einer geraden Linie BF schneiden (§. 168. Zus. II.);

4) Nach der Voraussetzung ist der Winkel ABD = R, und ABF = R, weil AB auf *B*C und BE, mithin auf der Ebene LM senkrecht steht (§. 170.), und jetzt wäre in der nämlichen Ebene BG am Punkte B auf AB die Linie *BD* und BF senkrecht (§. 9. Zus. IV.), was nicht möglich ist (§. 32. Zus. II.), daher müssen die drei Linien BC BE und B*D*, auf welche AB im Punkte B senkrecht steht, in der nämlichen Ebene liegen.

§. 172.

III. Lehrsatz:

A) Wenn zwei gerade Linien auf der nämlichen Ebene senkrecht stehen, so sind sie parallel; und wenn

B) von zwei Parallellinien die eine auf einer Ebene senkrecht steht, so steht die andere auch darauf senkrecht.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 127.) die beiden Linien AB und CD auf die Ebene LM senkrecht;

2) Man verbinde die beiden Punkte B und C, in welchen die Perpendikel mit der Ebene LM zusammen stoßen, durch die gerade Linie BC, welche ganz in dieser Ebene liegen wird (§. 4. Zus.);

3) Am Punkte C errichte man in der Ebene LM auf CB das Perpendikel CE (§. 45.), mache es gleich BA, so daß CE = BA, und ziehe die gerade Linie AE;

4) Es ist nach der Voraussetzung der Winkel ABC = 90 Grad (§. 169. a.), und BCE = 90° (ex construct.), mithin ABC = BCE, ferner ist BC = BC, und nach Nro. 3. ist AB = CE, also ist △ ABC ≌ △ BCE (§. 20.), ferner ist AB = CE, dann BE = AC, und AE = AE, also △ ABE ≌ △ ACE (§. 24.), und der Winkel ABE = ACE, somit ACE = 90°, weil auch ABC = 90 Grad (§. 169. a.);

5) Deßwegen steht die Linie EC senkrecht auf CB, CA und CD, da nach Nro. 1. die Linie DC auch auf der Ebene senkrecht steht;

6) Die drei Linien CB, CA und CD liegen in der nämlichen Ebene (§. 171.), in welcher AB liegt (§. 4. Zus.), das ist, AB und CD liegen in der nämlichen Ebene;

7) Endlich ist ABC = R = DCB (§. 169. a.), weßhalb AB mit DC parallel ist (§. 38. Zus. I.).

Es sind also zwei gerade Linien parallel, wenn sie auf der nämlichen Ebene senkrecht stehen.

Beweis von B:

1) Man konstruire die Figur, wie vorhin beim Beweise von *A* bei Nro. 2. u. 3., es ist nach Nro. 4. wieder das Dreieck *A*BC ≌ △ *B*CE, dann △ *AB*E ≌ △ *A*CE, und *AB*C = *B*CE = R, wie auch *AB*E = *A*CE = R, weßhalb EC auf CB und C*A*, also auf die Ebene *AB*C senkrecht steht (§. 170.);

2) Die Linie CD ist als Parallele zu *BA* in der nämlichen Ebene, in welcher *AB* liegt (§. 37. b.); wird nun die Ebene *AB*C vergrößert, so fällt CD ganz in diese Ebene, und EC steht auch auf CD senkrecht (§. 169. a.);

3) Bei den Parallelen *AB* und DC sind die Winkel A*B*C + *BCD* = 2R (§. 41.), und *BCD* = R, weil nach der Annahme *ABC* = R (§. 9. Zus. IV.);

4) Die Linie *DC* steht jetzt auf *CB* und CE, also auf die ganze Ebene LM senkrecht (§. 170.).

Wenn demnach von zwei Parallelen die eine auf einer Ebene senkrecht steht, so steht die andere auch darauf senkrecht.

Zusatz: Wenn zwei gerade Linien mit einer dritten parallel sind, so sind sie es auch unter sich, wenn schon nicht alle drei Linien in der nämlichen Ebene liegen.

Es sei (Fig. 128.) die Linie *AB* ♯ CD, und CD ♯ EF, und man ziehe vom Punkte H der Linie CD in der Ebene, in welcher CD und *AB* liegt, auf CD das Perpendikel HG, und vom nämlichen Punkte H in der Ebene, in welcher CD und EF liegt, auf CD das Perpendikel HM (§. 32.), und denke sich durch die Punkte G, H und M die Ebene GHM gelegt; es ist DH oder CD senkrecht auf HG und HM, also auf die Ebene GHM (§. 170.), ferner ist nach der Voraussetzung CD ♯ *AB*, und C*D* ♯ EF, also stehen auch *AB* und EF auf der Ebene GHM senkrecht (Lehrs. *B*.), und *AB* ist auch mit EF parallel (Lehrs. *A*.).

§. 173.

I. Aufgabe, von einem Punkte außer der Ebene auf sie ein Perpendikel zu ziehen.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 129.) vom Punkte *A* außer der Ebene LM auf diese Ebene eine senkrechte Linie zu ziehen;

2) Man ziehe in der Ebene LM die beliebige gerade Linie DE, dann vom Punkte *A* auf DE das Perpendikel *AC* (§. 33.), ferner am Punkte C in der Ebene LM auf DE das Perpendikel CH (§. 32.), und endlich von *A* auf CH das Perpendikel *AB*, so ist dieses die verlangte Linie, welche auf LM senkrecht steht.

Beweis:

1) Man ziehe in der Ebene LM durch B zu DE die Parallele FG (§. 39.);

2) Die Linie DE steht senkrecht auf *AC* und CH (ex constr.), weßhalb DE auf die Ebene *ACB* senkrecht steht (§. 170.), gleichwie auch die Parallele FG darauf senkrecht ist (§. 172. *B*.);

3) Es ist also *AB*G = R (§. 169. a.), und ABC = R (ex constr.), und die Linie *A*B steht auf der Ebene LM senkrecht (§. 170.).

I. Zusatz: Von einem Punkte außer einer Ebene ist auf diese nur ein einziges Perpendikel möglich. Denn ist (Fig. 129.) die Linie *A*B auf der Ebene LM senkrecht, und man zieht eine andere Linie *A*C auf die Ebene LM, und zu den Durchschnittspunkten *C* und *B* die gerade Linie CB, so ist im rechtwinklichten Dreiecke *ABC* wegen des rechten Winkels bei B der Winkel *ACB* spitzig (§. 29. Zus.), und die Linie *A*C steht auf der Ebene LM schief (§. 169. b.).

II. Zusatz: Von allen geraden Linien, die von einem Punkte außer einer Ebene auf diese möglich sind, ist das Perpendikel die kürzeste Linie, und mißt deßwegen die Entfernung des Punktes von der Ebene.

Denn wenn (Fig. 129.) die Linie *A*B auf der Ebene LM senkrecht steht, so wird jede andere Linie *AC* Hypotenuse im rechtwinklichten Dreiecke *A*C*B*, und ist deßhalb größer, als *AB* (§. 30. Zus. IV.).

III. Zusatz: Wenn *A*B auf der Ebene LM, und *A*C auf die in dieser Ebene gezogene Linie DE senkrecht steht, so steht auch die gerade Linie BC auf DE senkrecht.

Denn sonst könnte man durch C in der Ebene LM auf DE das Perpendikel Cn, und auf Cn das Perpendikel *A*n ziehen, und *A*n wäre auch auf die Ebene LM senkrecht (Aufg.), und es gäbe von *A* auf LM zwei Perpendikel *A*B und *A*n, was nicht möglich ist (Zus. I.)

IV. Zusatz: Wenn *A*B auf der Ebene LM senkrecht steht, und *CB* in dieser Ebene auf DE senkrecht ist, so ist auch *A*C auf DE perpendikulär.

Denn sonst könnte man auf DE das Perpendikel *A*p, dann von p in der Ebene LM auf DE das Perpendikel pq, und auf pq von *A* das Perpendikel *A*q ziehen, welches ebenfalls auf die Ebene LM senkrecht wäre (Aufg.), was unmöglich ist (Zus. I.).

§. 174.

II. Aufgabe, durch einen in einer Ebene gegebenen Punkt auf sie eine senkrechte Linie zu ziehen.

Auflösung:

1) Man nehme (Fig. 129.) außer der Ebene LM einen beliebigen Punkt *A* an, und ziehe von diesem nach §. 173. auf die Ebene LM die senkrechte Linie *A*B;

2) Ist durch den gegebenen Punkt R auf die Ebene das Perpendikel zu errichten, so ziehe man durch R mit B*A* die Parallele RS (§. 39.), es ist RS durch den in der Ebene LM gegebenen Punkt R auf die Ebene das verlangte Perpendikel (§. 172. B.).

Zusatz: Durch einen in einer Ebene gegebenen

Punkt gibt es auf die Ebene nur eine einzige senkrechte Linie.

Denn (Fig. 129.) wäre nebst RS durch den Punkt R auch RT auf die Ebene LM senkrecht, und man würde durch die drei Punkte S, R und T eine Ebene legen, so würde sie die Ebene LM, weil sie damit im Punkte R zusammen stoßt (§. 168. c.), in einer geraden Linie RU schneiden (§. 168. Zus. II.), und auf RU wäre in der nämlichen Ebene RSTU vom Punkte R aus sowohl die Linie RS, als auch RT senkrecht (§. 169. a.); dieses ist aber nicht möglich (§. 32. Zus. II.), daher gibt es durch einen in einer Ebene gegebenen Punkt auf die Ebene nur ein einziges Perpendikel.

§. 175.

Neigungswinkel.

a) Durchschneidet eine gerade Linie eine Ebene schief, oder steht sie darauf schief, und man zieht von einem beliebigen Punkte der Linie auf die Ebene ein Perpendikel, und verbindet in der Ebene die beiden Berührungspunkte durch eine gerade Linie, so heißt der dadurch entstehende geradlinigte Winkel der **Neigungswinkel der schiefen Linie gegen die Ebene.**

Daher ist (Fig. 129.) der Winkel *ACH* der Neigungswinkel der Linie *A*C zur Ebene LM, wenn *A*C auf der Ebene LM schief steht, dann von *A* das Perpendikel *A*B auf die Ebene, und darin durch *C* und B die gerade Linie *C*H gezogen wird.

b) Wenn man vom gemeinschaftlichen Punkte der Durchschnittslinie zweier Ebenen in beiden Ebenen auf diese Linie Perpendikel zieht, so heißt der dadurch erhaltene Winkel der **Neigungswinkel der beiden Ebenen zu einander.**

Deßwegen ist (Fig. 124.) der Winkel EFH der beiden Linien EF und FH, von welchen die eine EF in der Ebene *CB*, und die andere FH in der Ebene LM am gemeinschaftlichen Punkte F der Durchschnitts-

Linie AB auf diese senkrecht steht, der Neigungswinkel der beiden Ebenen LM und BC.

Zusatz: Steht (Fig. 127.) eine gerade Linie AB auf einer Ebene LM senkrecht, und man zieht vom Punkte A auf LM eine senkrechte Linie, so fällt diese mit AB in eine Linie zusammen (§. 173. Zus. I.); zieht man nun in der Ebene LM vom Punkte *B* eine beliebige gerade Linie BC, so ist ABC der Neigungswinkel des Perpendikels AB zur Ebene LM, und immerhin ein rechter Winkel, oder = 90 Grad (§. 169. a.).

§. 176.

IV. Lehrsatz:

Wenn die Schenkel des einen Winkels mit den Schenkeln des anderen parallel sind, und die beiden Winkel nicht in der nämlichen Ebene liegen, so sind die Winkel ebenfalls einander gleich.

Beweis:

Es sei (Fig. 130.) der Schenkel AB $\#$ ED, und BC $\#$ E*F*, und es seien, wenn man durch die Scheitel die gerade Linie BE zieht, sowohl die Winkel ABE und DEB, als auch EBC und BE*F* innere Winkel (§. 37. d.);

2) Man mache AB = ED, und BC = E*F*, und ziehe die geraden Linien AD und *CF*, wie auch AC und D*F*;

3) Die Linie AB $\underline{\underline{\#}}$ DE (ex constr.), also auch AD $\underline{\underline{\#}}$ BE (§. 48. Zus. VIII.), ferner ist aus den nämlichen Gründen BC $\underline{\underline{\#}}$ E*F*, also auch *BE* $\underline{\underline{\#}}$ *CF*, folglich ist AD $\underline{\underline{\#}}$ C*F* (§. 172. Zus., und Arithm. I. §. 10. Nro. 4.), und deßwegen auch AC = D*F*;

4) Jetzt ist $AC = DF$, dann $AB = DE$, und $BC = EF$, mithin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (§. 24.), und der Winkel $ABC = DEF$ (§. 18. Zus. IV.).

I. Zusatz: Zwei Parallelen, die auf einer Ebene schief aufstehen, bilden mit dieser gleiche Neigungswinkel.

Stehen (Fig. 131.) die Linien AB und CD auf der Ebene LM schief, und ist die Linie AB # CD, zieht man ferner von den beliebigen Punkten A und C dieser Linien auf die Ebene LM die Perpendikel AE und CF (§. 173.), so ist AE # CF (§. 172. A.), und AB # CD (ex constr.), also der Winkel $BAE = DCF$ (Lehrs.), überdieß ist $AEB = DFC = R$ (§. 169. a.), mithin ist auch $ABE = CDF$ (§. 43. Zus. II.), d. h., die zwei Parallelen AB und CD machen mit der Ebene LM gleiche Neigungswinkel.

II. Zusatz: Wenn sich zwei Ebenen schneiden, und man zieht durch einen beliebigen Punkt ihrer Durchschnittslinie in beiden Ebenen auf diese Linie Perpendikel, so ist der Winkel, den die Perpendikel bilden, immer gleich groß, man mag den Punkt annehmen, wo man will.

Zieht man (Fig. 124.) vom beliebigen Punkte F der Durchschnittslinie AB der beiden Ebenen LM und BC in der einen Ebene LM das Perpendikel FH, und in der anderen Ebene BC auf die Linie AB das Perpendikel FE, und zieht man auf die nämliche Weise durch einen anderen beliebigen Punkt B der Durchschnittslinie die Perpendikel BN und BD, so ist FH # BN, und FE # BD (§. 38. Zus. I.), und deßhalb der Winkel $EFH = DBN$ (Lehrs.).

III. Zusatz: Durch den Winkel, den man auf diese Weise erhält, ist die Neigung zweier Ebenen gegen einander vollkommen bestimmt.

Denn wenn (Fig. 124.) die Linie FH in der Ebene LM auf AB, und die Linie FE in der Ebene BC ebenfalls am Punkte F auf AB senkrecht steht, so bestimmen die drei Punkte A, B und H die Lage der Ebene LM, und die drei Punkte A, B und E die

Lage der Ebene BC (§. 168. b.), weßhalb der Winkel EFH die Neigung der beiden Ebenen LM und BC gegen einander bestimmt, und der **Neigungswinkel** der beiden Ebenen genannt wird.

IV. Zusatz: Wenn der Neigungswinkel ein rechter Winkel ist, so steht die eine Ebene auf der anderen senkrecht.

Ist (Fig. 132.) der Neigungswinkel AB*F* ein rechter Winkel, und man verlängert in der Ebene LM die gerade Linie FB gegen B hin, so sind die Winkel AB*F* und ABE Nebenwinkel (§. 8. a.), und ABE ist ebenfalls ein rechter Winkel (§. 9. Zus. III.); deßwegen neigt sich die Ebene *CD* auf keine Seite, und steht auf der Ebene LM senkrecht.

Anmerkung: Die beiden Zusätze II. und III. gelten auch für den Fall, wenn (Fig. 124.) die in den beiden Ebenen LM und BC durch F gezogenen geraden Linien FH und FE auf der Durchschnittslinie unter gleichen Winkeln schief aufstehen, und ein solcher Winkel bestimmt ebenfalls die Neigung der beiden Ebenen zu einander; indeß wählt man aber zur Bestimmung der Neigung lieber jenen Winkel, dessen Schenkel senkrecht stehen, weil sich der rechte Winkel leichter und bestimmter konstruiren läßt.

§. 177.

V. Lehrsatz:

Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene senkrecht steht, so ist jede Ebene, welche durch diese Linie gelegt wird, auf jener Ebene senkrecht.

Beweis:

1) Es stehe (Fig. 132.) die gerade Linie AB auf der Ebene LM senkrecht, und durch AB sei die Ebene *DC* gelegt;

2) Durch B errichte man in der Ebene LM auf die Durchschnittslinie DG das Perpendikel B*F* (§. 32.), es ist, weil nach der Voraussetzung AB in der Ebene DC auf die Ebene LM, also auch auf DG senkrecht steht (§. 169. a.), der Winkel ABE der Neigungs-

winkel der Ebenen DC und LM (§. 176. Zus. III.), und ein rechter Winkel (§. 169. a.), weßhalb die Ebene DC auf der Ebene LM senkrecht steht (§. 176. Zus. IV.).

I. Zusatz: Wenn man von einem beliebigen Punkte der einen Ebene, welche auf der anderen senkrecht steht, auf die Durchschnittslinie ein Perpendikel zieht, so steht dieses auf der anderen Ebene senkrecht.

Steht (Fig. 132.) die Ebene DC auf LM senkrecht, und man zieht vom Punkte A der Ebene DC auf die Durchschnittslinie DG das Perpendikel AB, und in der Ebene LM auf die Durchschnittslinie DG durch B das Perpendikel *BF*, so ist *ABF* der Neigungswinkel (§. 176. Zus. III.), und ein rechter Winkel (§. 176. Zus. IV.), gleichwie der Winkel *ABD* ein rechter Winkel ist (per hyp.); es steht also AB auf DG und BF senkrecht, mithin auf die Ebene LM selbst (§. 170.).

II. Zusatz: Wenn eine Ebene auf der anderen senkrecht steht, und man zieht von einem beliebigen Punkte der ersten Ebene auf die andere ein Perpendikel, so liegt dieses ganz in der ersten Ebene, und steht auf der Durchschnittslinie senkrecht.

Ist (Fig. 132.) die Ebene DC auf LM senkrecht, und man zieht vom Punkte A der Ebene DC auf die Ebene LM das Perpendikel AB (§. 173.), so könnte man, wenn AB nicht in der Ebene DC zugleich auf DG senkrecht wäre, von A in der Ebene DC auf DG das Perpendikel AQ ziehen, welches auf die Ebene LM senkrecht wäre (Zus. I.), und es gäbe von A auf die Ebene zwei Perpendikel AB und AQ, was nicht möglich ist (§. 173. Zus. I.), daher liegt das von A auf LM gezogene Perpendikel in der Ebene DC, und steht auf DG senkrecht.

III. Zusatz: Steht eine Ebene auf einer anderen senkrecht, und man zieht von einem Punkte der Durchschnittslinie auf sie in der ersten Ebene ein Perpendikel, so steht dieses auch auf der anderen Ebene senkrecht.

Wenn (Fig. 132.) die Ebene DC auf der Ebene

LM senkrecht steht, und man zieht vom Punkte B auf die Durchschnittslinie DG das Perpendikel *BA*, und in der Ebene LM von *B* das Perpendikel *BF*, so ist *ABF* der Neigungswinkel der beiden Ebenen (§. 176. Zus. III.), und ein rechter Winkel (§. 176. Zus. IV.), weßhalb *BA* auf DG und *BF*, also auf der Ebene LM senkrecht steht (§. 170).

IV. Zusatz: Wenn eine Ebene auf einer anderen senkrecht steht, und man zieht von einem Punkte der Durchschnittslinie auf die andere Ebene ein Perpendikel, so liegt dieses ganz in der ersten Ebene, und steht auch auf der Durchschnittslinie senkrecht.

Wenn (Fig. 132.) die Ebene DC auf der Ebene LM senkrecht steht, und man zieht vom Punkte *B* auf die Ebene LM das Perpendikel *BA*, und zugleich in der Ebene DC von *B* auf DG das Perpendikel *BH*, so müssen die zwei Linien BA und BH in eine Linie zusammen fallen; weil sonst auch BH auf der Ebene LM senkrecht wäre (Zus. III.), und es durch den Punkt B auf die Ebene LM zwei Perpendikel gäbe, was nicht möglich ist (§. 174. Zus.), daher liegt das Perpendikel BA ganz in der Ebene DC, und steht auf der Durchschnittslinie DG senkrecht.

V. Zusatz: Die Durchschnittslinie zweier Ebenen steht auf der Ebene des Neigungswinkels senkrecht. Denn (Fig. 124.) der Winkel BFH ist = R, und BFE ist ebenfalls = R (§. 176. Zus. III.), daher steht die Durchschnittslinie BA auf der Ebene GFH des Neigungswinkels senkrecht (§. 170.).

VI. Zusatz: Wenn die Durchschnittslinie zweier Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht steht, so sind beide Ebenen auf dieser dritten senkrecht.

Steht (Fig. 124.) die Durchschnittslinie BA der beiden Ebenen LM und BC auf der Ebene GFH senkrecht, so sind jene zwei Ebenen durch die Durchschnittslinie gelegt, weil sie beiden gemeinschaftlich ist, und deßhalb sind sie auf der dritten Ebene GFH senkrecht (Lehrs.).

VII. Zusatz: Zwei Ebenen, die einander schneiden, stehen auf der Ebene ihres Neigungswinkels senkrecht.

Wenn sich (Fig. 124.) die beiden Ebenen LM und *B*C in der geraden Linie A*B* schneiden, so steht diese auf der Ebene GFH des Neigungswinkels senkrecht (Zus. V.), weßhalb die beiden Ebenen selbst auf der Ebene des Neigungswinkels senkrecht stehen (Zus. VI.).

§. 178.

VI. Lehrsatz:

Wenn zwei Ebenen sich schneiden, und auf einer dritten Ebene senkrecht stehen, so steht auch die Durchschnittslinie der beiden ersten Ebenen auf der dritten senkrecht.

Beweis:

1) Wenn (Fig. 133.) die beiden Ebenen ACB und ABD auf der Ebene LM senkrecht stehen, und sich in der Linie AB schneiden, so ziehe man von einem gemeinschaftlichen Punkte *A* der Durchschnittslinie AB in einer jeden Ebene auf ihre Durchschnittslinien mit der Ebene LM, also auf BC und BD die Perpendikel Am und An, es steht jedes dieser Perpendikel auf der Ebene LM senkrecht (§. 177. Zus. I.);

2) Von dem Punkte *A* gibt es auf die Ebene LM nur ein einziges Perpendikel (§. 173. Zus. I.), und dieses kann nur die gemeinschaftliche Durchschnittslinie AB sein, weil diese allein in den beiden Ebenen ACB und ADB liegt; weßhalb die Durchschnittslinie AB dieser beiden Ebenen auch auf der Ebene LM senkrecht steht.

I. Zusatz: Wenn (Fig. 133.) die Durchschnittslinie AB der beiden Ebenen ABC und ABD auf einer dritten Ebene LM senkrecht steht, so ist der Winkel CBD, welchen ihre Durschnittslinien BC und BD bilden, der Neigungswinkel der beiden Ebenen ABC und ABD. Denn AB steht auf LM senkrecht (per hyp.), mithin ist ABC = R, nnd ABD = R (§. 169. a.); ferner liegt BC zugleich in der Ebene ABC, und *B*D zugleich in der Ebene ABD, weßhalb CBD der

Nei-

Neigungswinkel der beiden Ebenen ABC und ABD ist (§. 176. Zus. III.).

II. Zusatz: Wenn (Fig. 133.) eine Ebene LM auf zwei anderen Ebenen ACB und ADB, die einander in AB schneiden, senkrecht steht, so geben die Durchschnittslinien BC und BD der beiden Ebenen mit der Ebene LM den Neigungswinkel eben dieser Ebenen, das ist, CBD ist der Neigungswinkel der Ebenen ABC und ABD. Denn AB steht auf der Ebene LM senkrecht (Lehrs.), folglich ist CBD der Neigungswinkel der Ebenen ABC und ABD (Zus. I.).

§. 179.

Parallelebenen.

Zwei Ebenen, die, wie immer verlängert, nie einander schneiden, heissen Parallelebenen.

I. Zusatz: Wenn eine gerade Linie auf zwei Ebenen zugleich senkrecht steht, so sind die Ebenen parallel; indem sonst die gerade Linie, wenn sich nämlich die Ebenen schneiden würden, auf diese zwei Ebenen nicht zugleich senkrecht sein könnte (§. 169. Zus. III.).

II. Zusatz: Die Durchschnittslinien zweier Parallelebenen mit einer dritten Ebene sind unter sich parallel.

Denn sind (Fig. 135.) die beiden Ebenen BE und DF unter sich parallel, und schneiden sie die Ebene LS in den geraden Linien BA und CD, so liegen diese zwei Linien in der Ebene LS, und können verlängert nie zusammen stoßen, weil sonst die Ebenen BE und DF selbst, in welchen sie liegen, zusammen stoßen würden, und deßhalb nicht parallel wären; d. h., die beiden Durchschnittslinien BA und DC der Parallelebenen BE und DF sind unter sich parallel.

III. Zusatz: Wenn eine gerade Linie die eine Parallelebene schneidet, so schneidet sie verlängert auch die andere.

Wenn (Fig. 134.) die Ebene MN parallel ist mit KL, und die gerade Linie AG die eine Parallelebene MN im Punkte A schneidet, und man zieht von den Punkten A und G auf die Ebene KL die Perpendikel AB und GF, so sind diese parallel (§. 172. A.), und

liegen in der nämlichen Ebene ABFD (§. 37. b.), welche die Ebene MN in einer geraden Linie AD schneidet (§. 168. Zus. II.), weßhalb AD # BF (Zus. II.); nun schneidet aber die Linie AG die Parallele AD im Punkte A, also verlängert auch die andere Parallele BF (§. 41. Zus. II.), mithin ebenfalls die Ebene KL, in welcher sie liegt.

IV. Zusatz: Wenn eine Ebene die eine von zwei Parallelebenen schneidet, so schneidet sie verlängert auch die andere.

Denn wenn (Fig. 134.) die Ebene DAG die Parallelebene MN schneidet, so schneidet die gerade Linie AG verlängert die andere Parallelebene KL (Zus. III.), mithin schneidet auch die Ebene DAG, in welcher AG liegt, verlängert die Ebene KL.

V. Zusatz: Zwei Parallelebenen stehen in allen Punkten gleich weit von einander ab.

Denn man fälle (Fig. 134.) aus zwei beliebigen Punkten C und A der einen Parallelebene MN auf die andere KL die Perpendikel CE und AB (§. 173.), so ist CE # AB (§. 172. A.), mithin liegen beide Perpendikel in der Ebene CABE (§. 37. b.), welche die zwei Parallelebenen MN und KL in den geraden Linien AC und BE schneidet, weßhalb auch AC # BE ist (§. 179. Zus. II.), mithin AB = CE (§. 41. Zus. IV.), das ist, die beiden Parallelebenen stehen in allen Punkten gleich weit von einander ab.

§. 180.

VII. Lehrsatz:

Wenn eine gerade Linie auf der einen von zwei Parallelebenen senkrecht steht, so steht sie auch auf der anderen senkrecht.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 134.) die Linie AB auf die Parallelebene KL senkrecht, und man ziehe in dieser Ebene die zwei Linien BE und BF so, daß sie zusammen keinen geraden Winkel bilden (§. 7. Zus. I.), es ist ABE = R, und ABF = R (§. 169. a.);

2) Durch die drei Punkte A, B und E, und durch A, B und F lege man Ebenen (§. 168. b.), welche die obere Parallelebene in den geraden Linien AC und *AD* schneiden (§. 179. Zus. IV.);

3) Die Linie AC ist parallel mit BE, und A*D* ist parallel mit BF (§. 179. Zus. II.), weßhalb

$$\left.\begin{array}{r} CAB + ABE = 2R \\ \text{und } DAB + ABF = 2R \end{array}\right\} (\S.\ 41.);$$

4) Nach Nro. 1. ist aber ABE = R, und ABF = R, daher ist auch CAB = R, und DAB = R, das ist, die Linie AB steht auch auf der Parallelebene MN senkrecht (§. 170.);

§. 181.

III. Aufgabe, durch einen Punkt eine Ebene zu legen, die mit einer anderen Ebene parallel ist.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 134.) durch den Punkt A eine Ebene zu legen, die mit der Ebene KL parallel ist;

2) Aus A ziehe man auf die Ebene KL das Perpendikel AB (§. 173.), und in der Ebene KL die beiden beliebigen geraden Linien BE und BF, die zusammen keinen geraden Winkel bilden (§. 7. Zus. 1.);

3) Durch A ziehe man mit BE in der Ebene ABE die Parallele AC, und in der Ebene ABF mit BF die Parallele A*D* (§. 39.), und lege durch die drei Punkte *C*, A und *D* die Ebene MN, so ist diese mit der Ebene KL die verlangte Parallelebene.

Beweis:

1) Die Linie AB ist auf KL senkrecht (ex constr.), mithin ABE = R, und ABF = R (§. 169. a.);

2) Ferner ist nach Nro. 3. der Auflösung AC # BE, und AD # BF, weßhalb (§. 41.)

$$CAB + ABE = 2R,$$
$$\text{und } DAB + ABF = 2R;$$

3) Nun ist aber ABE = R, und ABF = R, daher ist auch CAB = R, und DAB = R, das ist, die gerade Linie AB steht auch auf der Ebene MN senk-

recht (§. 170.), und die Ebene MN ist durch den Punkt A parallel mit KL gelegt worden (§. 179. Zus. I.).

Zusatz: Durch einen Punkt gibt es mit einer Ebene nur eine einzige Parallelebene. Denn gäbe es (Fig. 134.) zur Ebene KL nebst der Ebene MN noch eine andere Parallelebene, so müßte das Perpendikel BA auch auf dieser Ebene senkrecht sein (§. 180.), und es gäbe durch den Punkt A auf zwei sich schneidende Ebenen ein Perpendikel, welches nicht möglich ist (§. 169. Zus. I.).

§. 182.

VIII. Lehrsatz:

Die Neigungswinkel, welche zwei Parallelebenen auf einer Seite mit einer dritten Ebene bilden, sind gleich.

Beweis:

1) Es schneiden (Fig. 135.) die beiden Parallelebenen BE und DF die Ebene LS in der Linie AB und CD, es ist AB # CD (§. 179. Zus. II.);

2) Durch G errichte man in der Ebene LS auf AB das Perpendikel GM, so wird dieses auch die Parallele CD schneiden (§. 41. Zus. II.);

3) Ferner errichte man durch G in der Ebene BE auf AB das Perpendikel KG, so ist KGM der Neigungswinkel der beiden Ebenen BE und LS (§. 176. Zus. III.), und BG oder BA steht auf der Ebene KGM des Neigungswinkels senkrecht (§. 177. Zus. V.);

4) Die Ebene KGM schneidet die eine Parallelebene BE in der Linie KG, mithin auch die andere Parallelebene DF in einer geraden Linie HP (§. 179. Zus. IV.), und DH oder DC steht nach Nro. 1. auch auf der Ebene KGM senkrecht (§. 172. B.); weßhalb DHM = R, und DHP = R (§. 169. a.), und PHM ist der Neigungswinkel der beiden Ebenen DF und LS (§. 176. Zus. III.);

5) Die beiden Parallelebenen BE und DF werden durch die Ebene KGM in den Parallinien GK und HP geschnitten (§. 179. Zus. II.), bei welchen der in-

nere Winkel KGM seinem äußeren entgegengesetzten Winkel PHM gleich ist (§. 41.), und diese beiden Winkel sind nach Nro. 3 und 4. die Neigungswinkel der beiden Parallelebenen BE und DF zur Ebene LS.

Es sind also die Neigungswinkel KGM und PHM, welche die zwei Parallelebenen BE und DF auf der nämlichen Seite mit der Ebene LS bilden, einander gleich.

Zusatz: Wenn man (Fig. 135.) die Linie MG gegen G hin verlängert, so erhält man auf der anderen Seite in Absicht auf die beiden Parallelebenen BE und DF die Neigungswinkel QGK und GHP, die ebenfalls einander gleich sind; denn

$$\left.\begin{array}{l} QGK + KGM = 2R \\ \text{und } GHP + PHM = 2R \end{array}\right\} \text{(§. 8. Zus. III.)},$$

$$\text{also } QGK = GHP, \text{ weil } KGM = PHM \text{ (Lehrs.)}.$$

Anmerkung: 1) Stehen die beiden Parallelebenen auf der dritten Ebene senkrecht, so bilden sie nach jeder Seite hin Neigungswinkel, von welchen jeder ein rechter Winkel ist (§. 176. Zus. IV.).

2) Stehen die beiden Parallelebenen auf der dritten Ebene schief, so bilden sie mit dieser Ebene schiefe Neigungswinkel (§. 8. b.), nämlich nach einer Seite hin zwei spitzige und nach der anderen zwei stumpfe Winkel, und durch die spitzigen, wie durch die stumpfen Winkel, ist die Neigung der Parallelebenen zur dritten Ebene bestimmt; man nimmt aber gewöhnlich die spitzigen Winkel zur Bestimmung der Neigung zweier Ebenen zu einander.

§. 183.

IX. Lehrsatz:

Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie eine dritte Ebene in parallelen Linien schneiden, und nach einer Seite hin gleiche Neigungswinkel bilden.

Beweis:

1) Wenn (Fig. 135.) die beiden Ebenen BE und DF die Ebene LS in den Parallelen AB und CD schneiden, so ziehe man vom Punkte G auf AB in der Ebene LS das Perpendikel GM, es wird dieses auch die Parallele CD schneiden (§. 41. Zus. II.);

2) Durch G ziehe man in der Ebene BE auf AB das Perpendikel GK, so ist der Winkel KGM der Neigungswinkel der Ebenen BE und LS (§. 176. Zus. III.), und AB steht auf der Ebene KGM dieses Neigungswinkels senkrecht (§. 177. Zus. V.);

3) Die Ebene KGM stoßt mit der Ebene DF im Punkte H zusammen, und schneidet deßhalb diese Ebene in einer geraden Linie HP (§. 168. Zus II.), und die Parallele DC steht, wie AB, auf der Ebene KGM senkrecht (§. 172. B.), weßhalb PHD = R = DHM (§. 169. a.), und PHM ist der Neigungswinkel der Ebenen DF und LS (§. 176. Zus. III.);

4) Nach der Voraussetzung sind die Neigungswinkel einander gleich, somit ist KGM = PHM, und GK # HP, weil auch beide Linien als Durchschnittslinien in der Neigungsebene KGM liegen (§. 38.);

5) Nun errichte man in dieser Neigungsebene durch H auf PH das Perpendikel HN, so ist dieses auch auf GK senkrecht, weil GK # HP, und GNH = NHP (§. 41.), und also GNH = R, gleichwie NHP ein rechter Winkel ist (§. 8. c. und d.);

6) Die gemeinschaftliche Neigungsebene KGM steht auf der Ebene BE, und auf der Ebene DF senkrecht (§. 177. Zus. VII.), daher steht die Linie HN auf der Ebene BE und DF zugleich senkrecht (§. 177. Zus. I. und III.), und die Ebenen BE und DF sind parallel (§. 179. Zus. I.).

Es sind also die beiden Ebenen BE und DF parallel, weil sie eine dritte Ebene LS in parallelen Linien AB und CD schneiden, und nach einer Seite hin die gleichen Neigungswinkel KGM und PHM bilden.

Bei dem Verleger dieses sind auch nachstehende Schulbücher, welche an vielen königlich-baierischen Studienanstalten, und an anderen Schulen zum Gebrauche eingeführt sind, zu haben:

Aline: oder kleines Lesebuch für die obere Classe der Mädchenschulen. gr. 8. 1820. 30 kr.

Böhm, J. Leonh., Schulunterricht über Lyrische Dichtung. gr. 8. 1 fl. 36 kr.

Bundschue, J. v. G., Dr. u. Prof., Lehrbuch der Arithmetik zum Gebrauche in den Schulen und zum Selbstunterrichte. 1ter Theil, welcher das Numeriren und die vier Rechnungsarten mit unbenannten und mit benannten ganzen Zahlen, dann eine Anleitung zum Kopfrechnen, mehrere Tabellen über die baierischen, würtembergischen u. badischen Maaße und Gewichte, und die vorzüglichsten Münzen des In- u. Auslandes, wie auch eine Sammlung unaufgelöster Beispiele zur Uibung in den Rechnungsarten mit ganzen Zahlen enthält. 3te vermehrte Auflage. gr. 8. 54 kr.

Dasselbe, 2ter Theil, welcher die gemeinen Brüche und die Auflösung der Aufgaben der Regel Detri, Duplex, Triplex ꝛc. nach dem Proportional-Ansatze, u. nach der reesischen und der Kettenregel, wie auch eine Anleitung zur Auflösung dieser Aufgaben nach der wälschen Praktik und mittels des Kopfrechnens, und die in einigen Kantonen der Schweiz üblichen Maaße, Gewichte u. Münzen nebst einer Sammlung mehrerer unaufgelöster Beispiele enthält. 3te vermehrte Auflage. gr. 8. 54 kr.

Dasselbe, 3ter Theil, welcher die Dezimal- u. Sexagesimal-Brüche, die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln in Zahlen, die Elemente der Buchstabenrechnung und die einfachen Gleichungen mit einer unbekannten Größe nebst einer Sammlung von Beispielen zur Uibung in der Auflösung dieser Gleichungen, und mehrere Tabellen in Betreff verschiedener alter und neuen Maaße, Gewichte ꝛc. enthält. 3te vermehrte Auflage. gr. 8. 1 fl.

Dasselbe, 4ter Theil, welcher die allgemeinen Quadrirungs- u. Kubirungs-Gesetze mit den daraus für die Ausziehung der Quadrat- u. Kubikwurzeln abgeleiteten Regeln, dann die Auflösung einfacher Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen, und die der quadratischen u. unbestimmten, wie auch die arithmetischen u. geometrischen Verhältnisse, Proportionen u. Progressionen, die Lehre von den Logarithmen, das newtonianische Binomium sammt den Permutationen und Kombinationen, die Begründung der Auflösungen der verschiedenen Aufgaben der Regel Detri nach dem Proportional- und nach dem reesischen u. dem Ketten-Ansatze in der Lehre der geometr. Proportionen, u. einige Formeln zur Bestimmung der Zinseszinse enthält. 2te sehr vermehrte Auflage. gr. 8. 1 fl. 36 kr.

Bundschue, Joh. v. G., Dr. u. Prof., Lehrbuch der Geometrie und Trigonometrie zum Gebrauche in den Schulen und zum Selbstunterrichte. 2r Theil, welcher die Stereometrie und die ebene Trigonometrie nebst der Anwendung der Geometrie und Trigonometrie auf die Feldmeßkunst enthält. Mit 7 Figuren-Tafeln. gr. 8. 2 fl.

Cammerer, A. A., Prof., Anleitung, praktische, zum Uibersetzen aus dem Deutschen ins Lateinische mit steter Hinsicht auf Bröder, Wenk und Grotefend. 4te verbesserte und vermehrte Auflage. gr. 8. 1 fl.

—— Grundriß der Erdbeschreibung für Schulen und zum Selbstunterrichte. 4te sehr verbesserte Auflage. gr. 8. 1 fl. 12 kr.

—— Lehrbuch der alten u. mittleren Geschichte zum Schulgebrauche. gr. 8. 1 fl.

—— Grundriß der allgemeinen Weltgeschichte für Schulen und zur Selbstbelehrung. 3te verbesserte und vermehrte Auflage. gr. 8. 45 kr.

—— Das Königreich Baiern in acht Kreise eingetheilt für die vaterländischen Volksschulen. 4te vermehrte und verbesserte Auflage. 12. 15 kr.

Grieser, G., Neues deutsches orthographisches Wörterbuch mit vorangehenden Sprachbemerkungen für Schulen und jeden Stand. 2te vermehrte u. verbesserte Auflage. gr. 8. 48 kr.

—— Tabelle der lateinischen Declinationen. gr. Folio. 4 kr.

—— Elementar-Geometrie und ebene Trigonometrie. Für Schulen und zum Selbstunterrichte. Mit 5 Figuren-Tafeln. 8. 54 kr.

Karrer, Dr. Ph. Jak., Lesebuch für die unteren Klassen der Volksschulen. gr. 8. 1825. 16 Bogen. 24 kr.

Müller, Fr. Jos., Erziehung in Volksschulen. Mit einem Anhange und zwei in Kupfer gestochenen Muster-Vorschriften. 2te verbesserte und vermehrte Auflage. gr. 8. 4 fl.

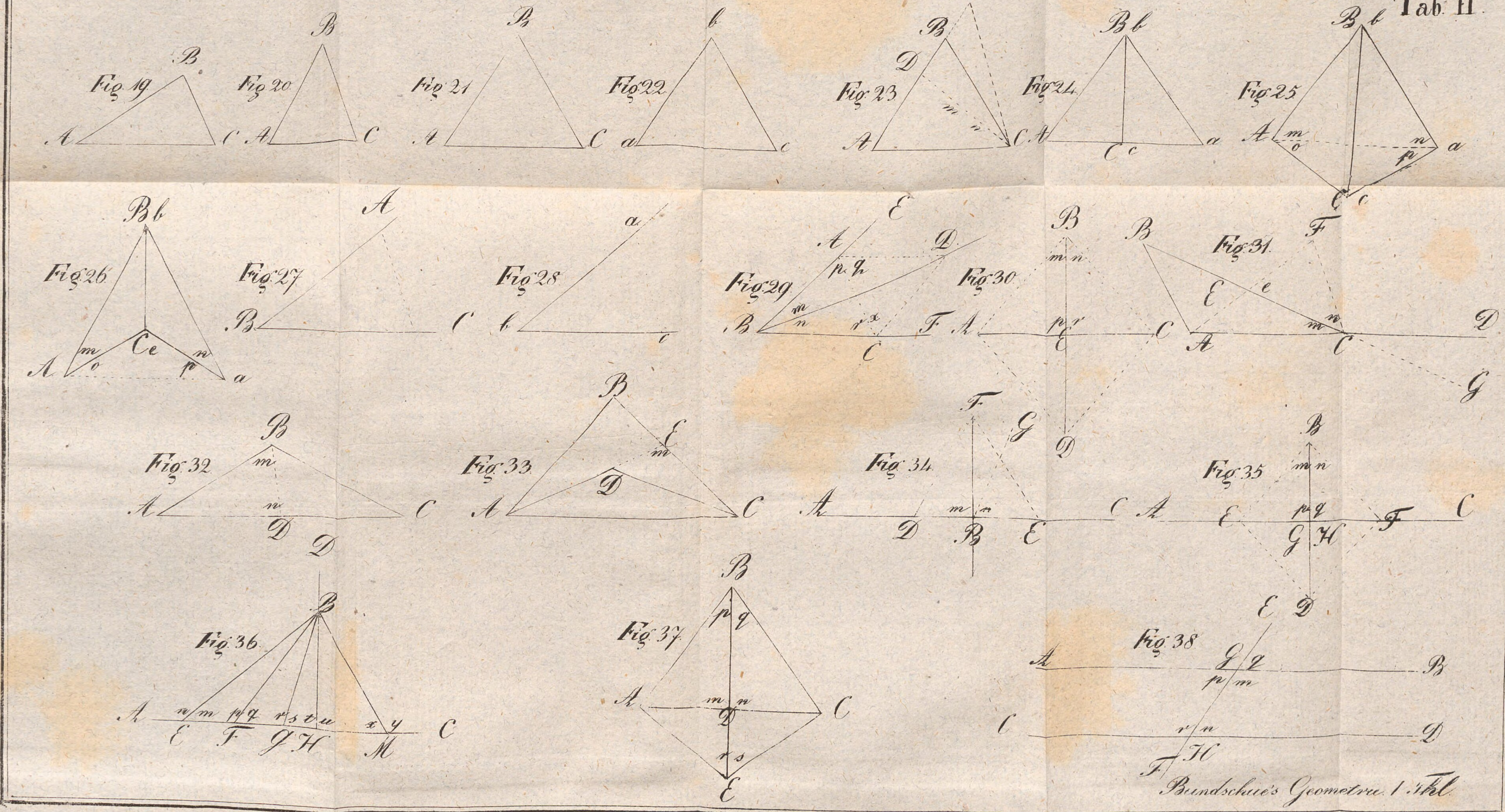
Seel, Heinr., Lehrbuch der Vaterlands-Geschichte, von der Urzeit bis auf unsere Tage, für Baierns Volksschulen. gr. 8. 1826. 1 fl.

Tabelle der Rechtschreibung. 2te verbesserte Auflage. 4 kr.

—— über sämmtliche Veränderungsarten aller beweglichen oder veränderlichen Redetheile. 8 kr.

Tab. I.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Bundschuh's Geometrie I. Tl.

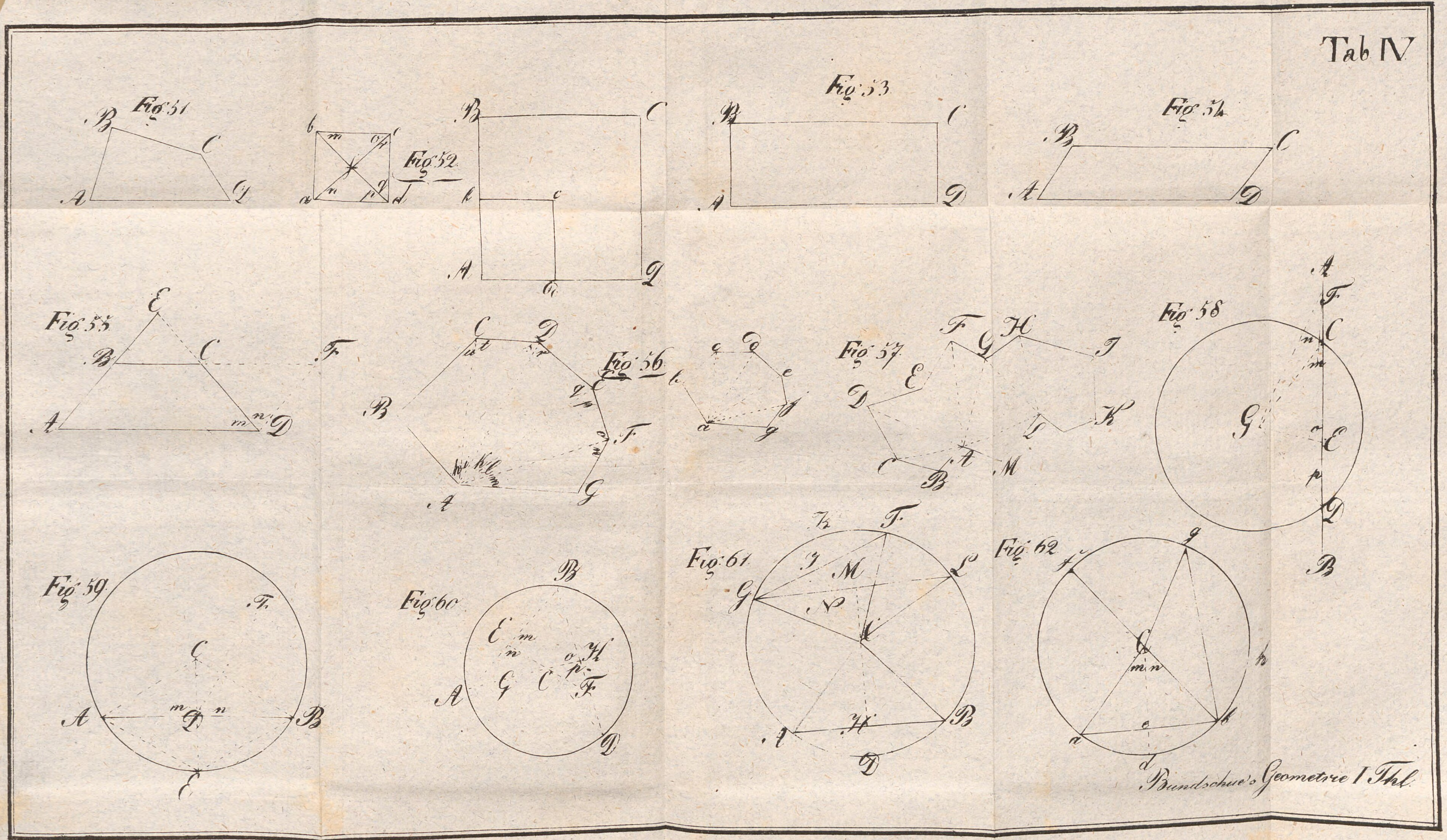
Tab. II



Bundschue's Geometrie 1 Thl.

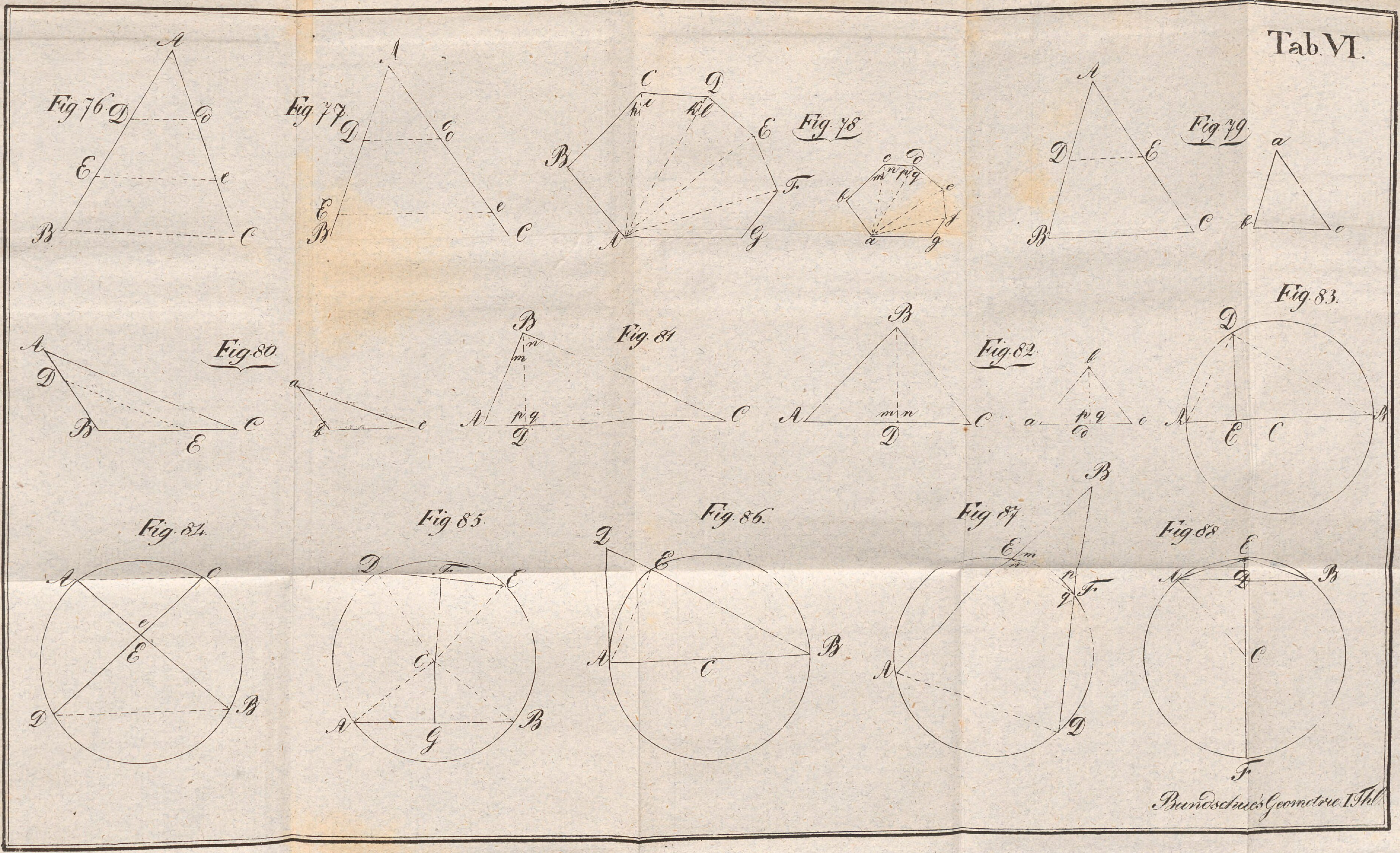
Tab. III

Bundschue's Geometrie I Thl.


Tab IV
Fig. 51
Fig. 52
Fig. 53
Fig. 54
Fig. 55
Fig. 56
Fig. 57
Fig. 58
Fig. 59
Fig. 60
Fig. 61
Fig. 62
Bundschue's Geometrie I Thl.

Tab. V.
Fig. 63
Fig. 64
Fig. 65
Fig. 66
Fig. 67
Fig. 68
Fig. 69
Fig. 70
Fig. 71
Fig. 72
Fig. 73
Fig. 74
Fig. 75
Bundschue's Geometrie 1 Thl.

Tab. VI.



Bundschue's Geometrie I Thl.

Fig. 89.

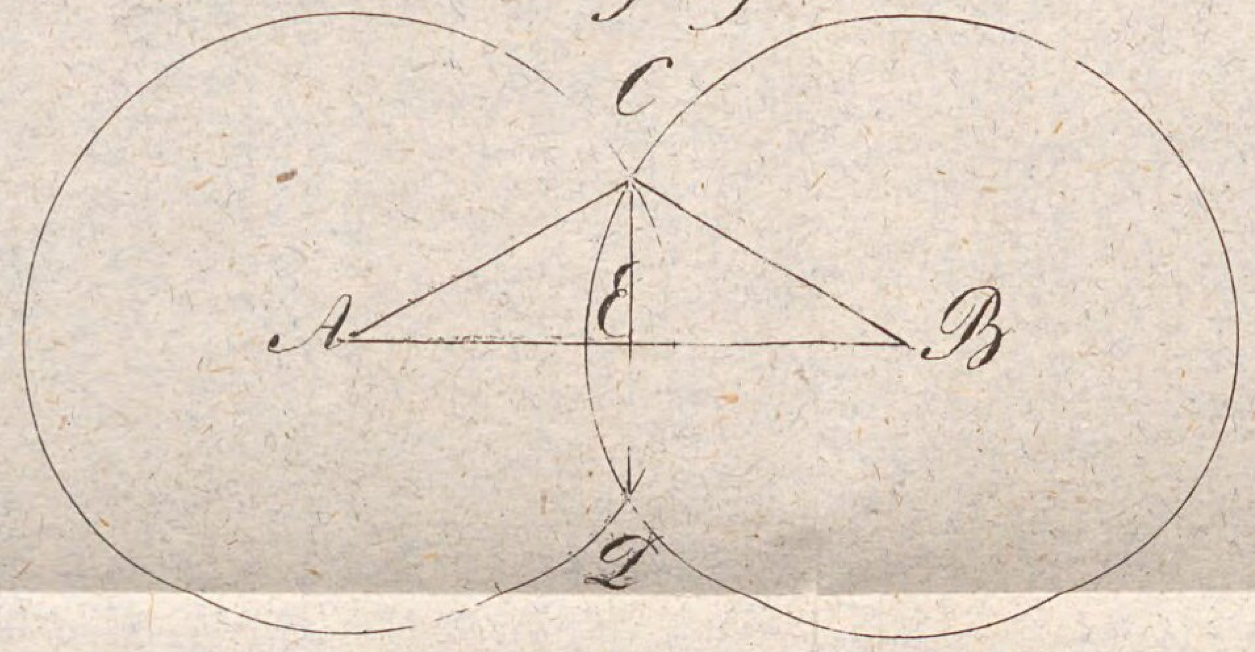


Fig. 90.

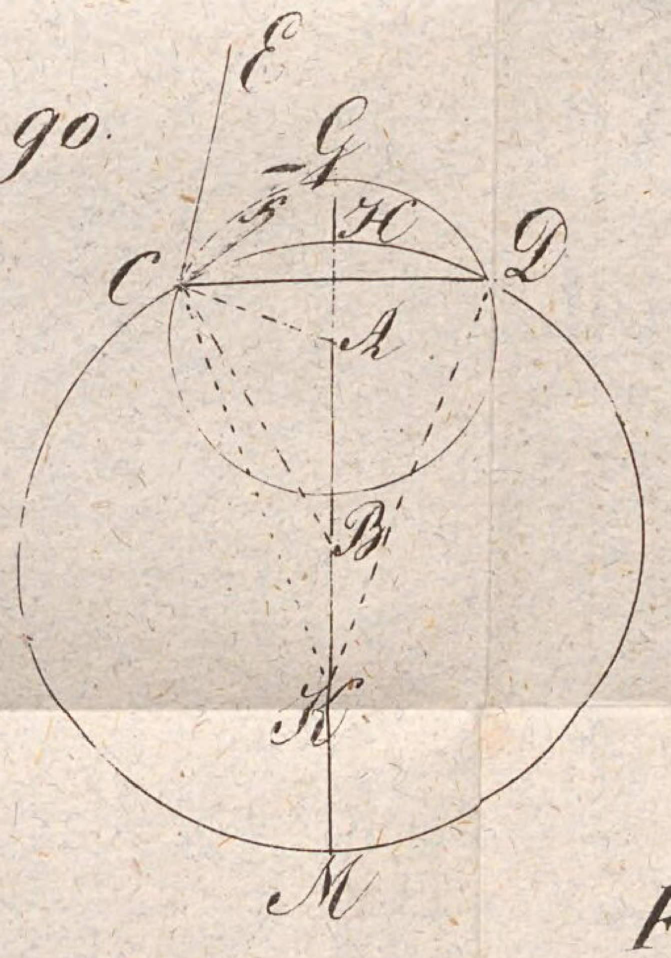


Fig. 91.

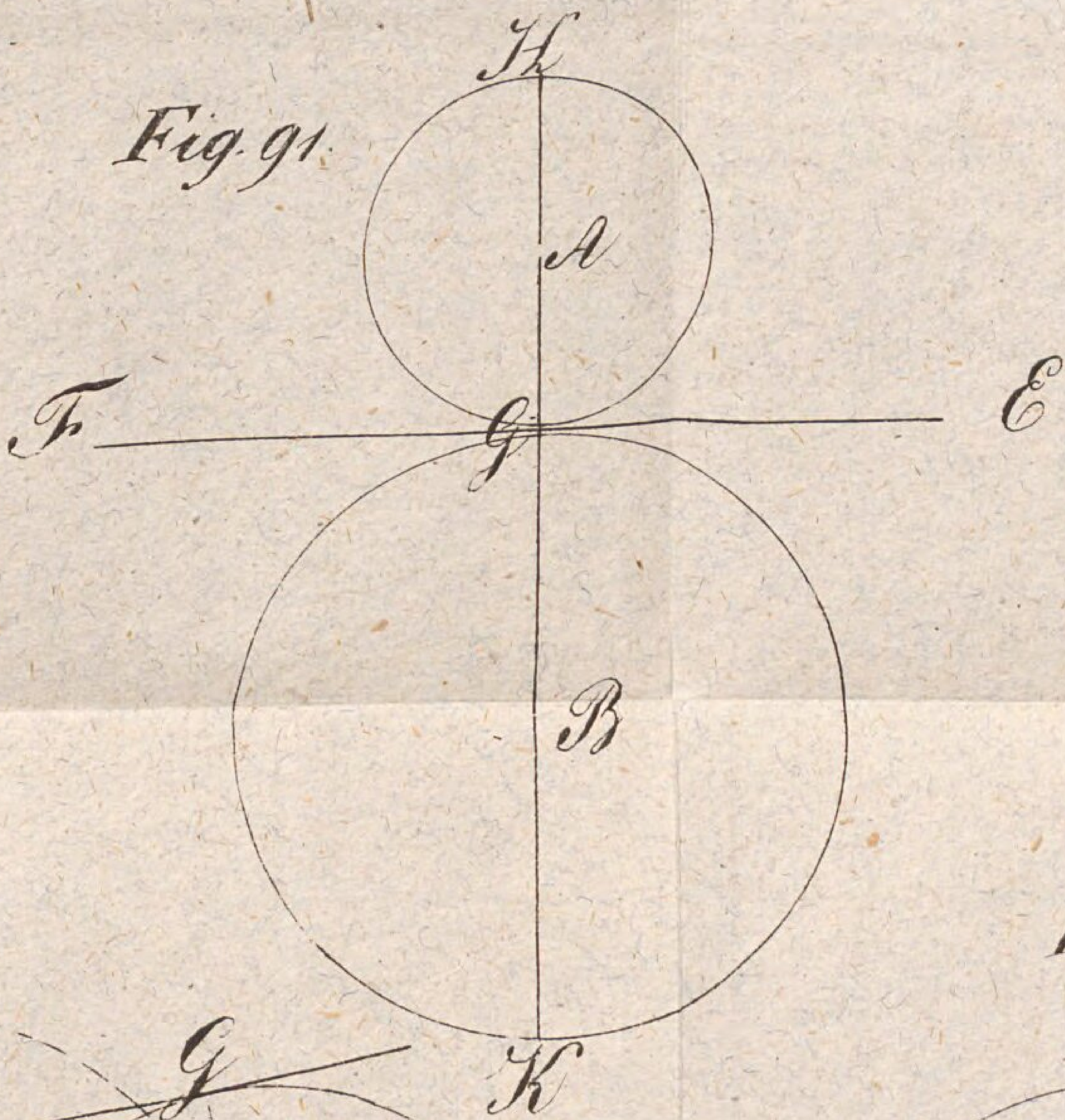


Fig. 92.

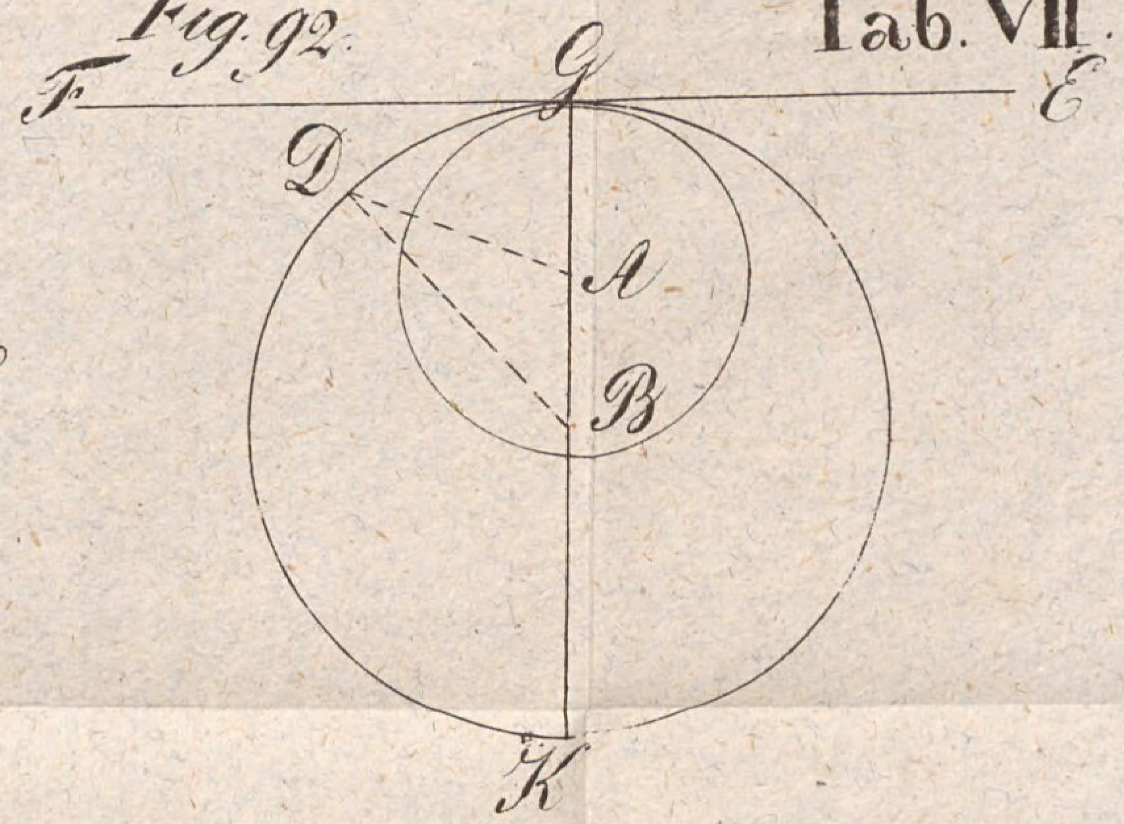


Fig. 93.

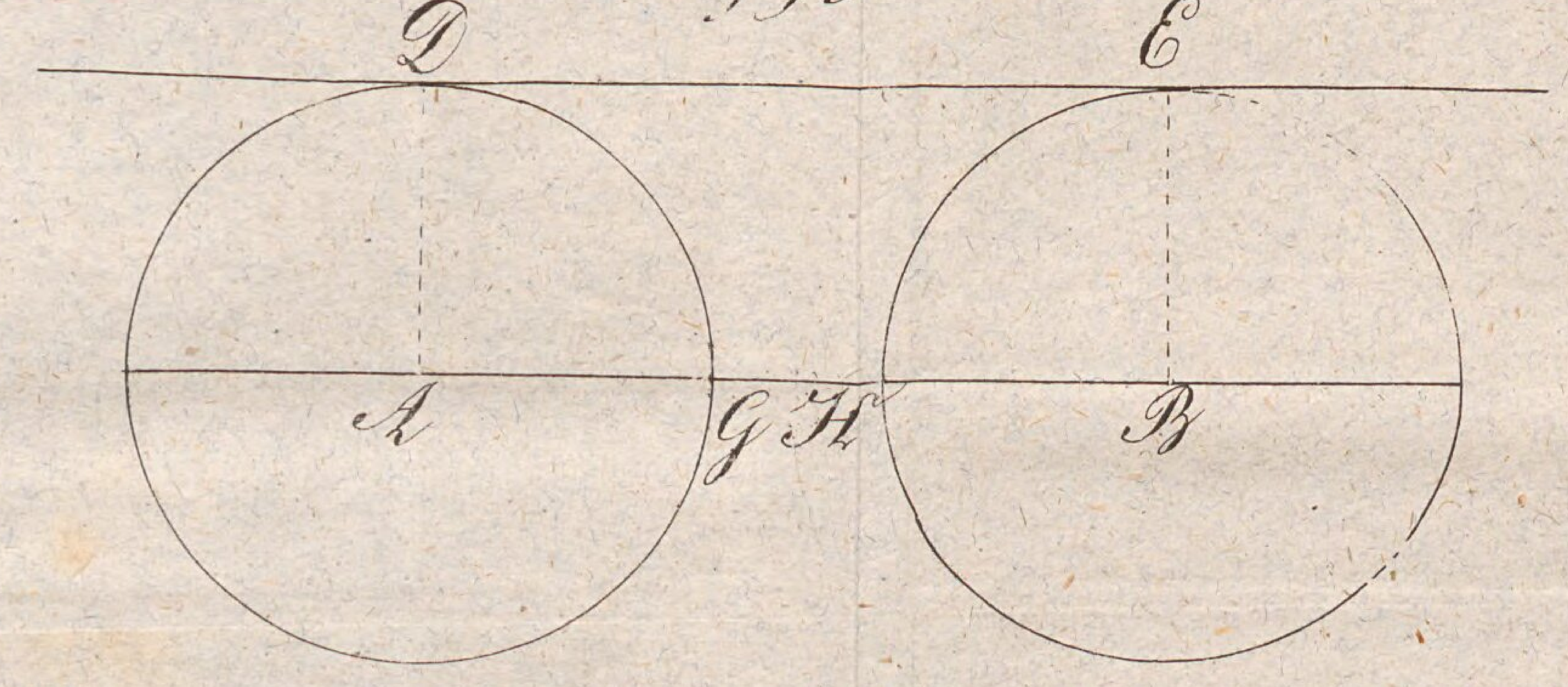


Fig. 94.

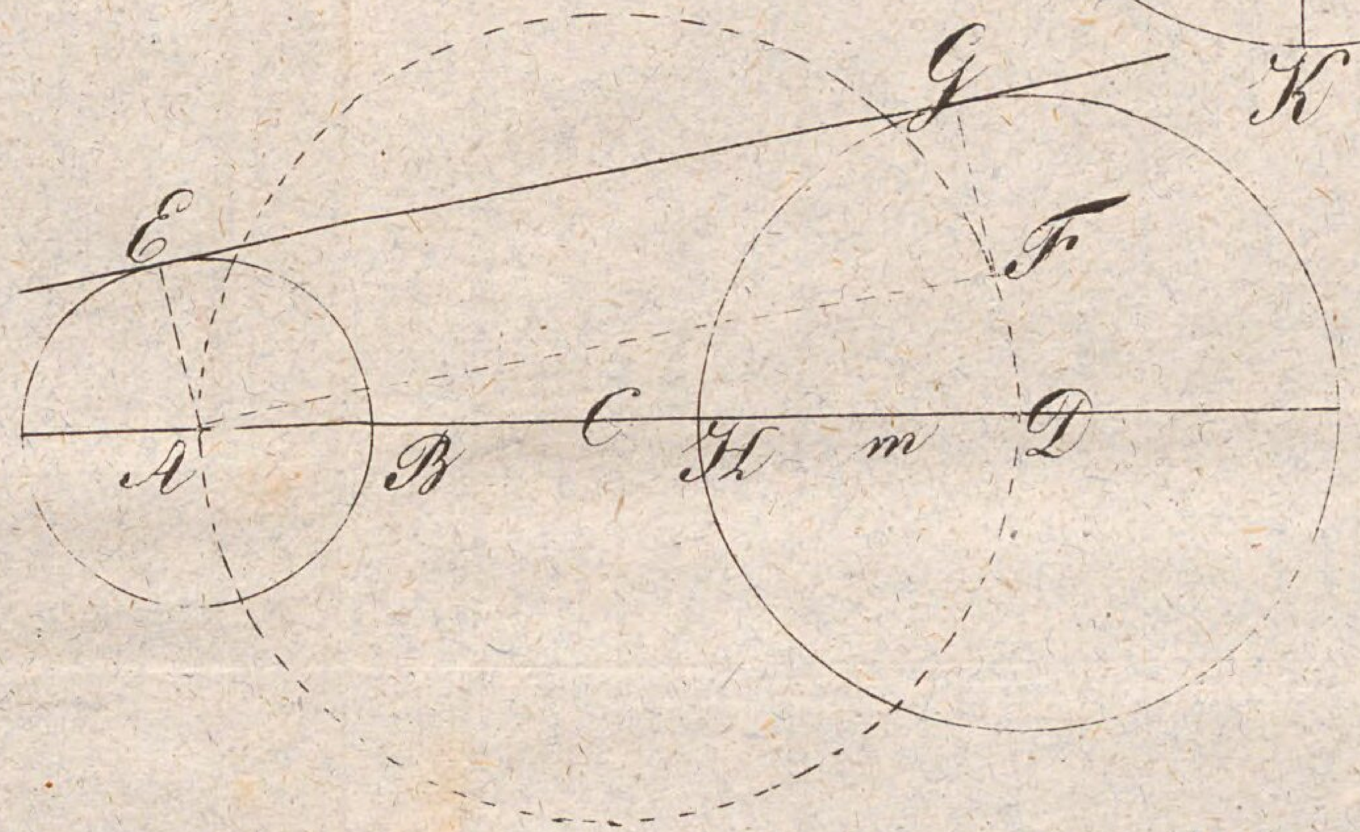


Fig. 95.

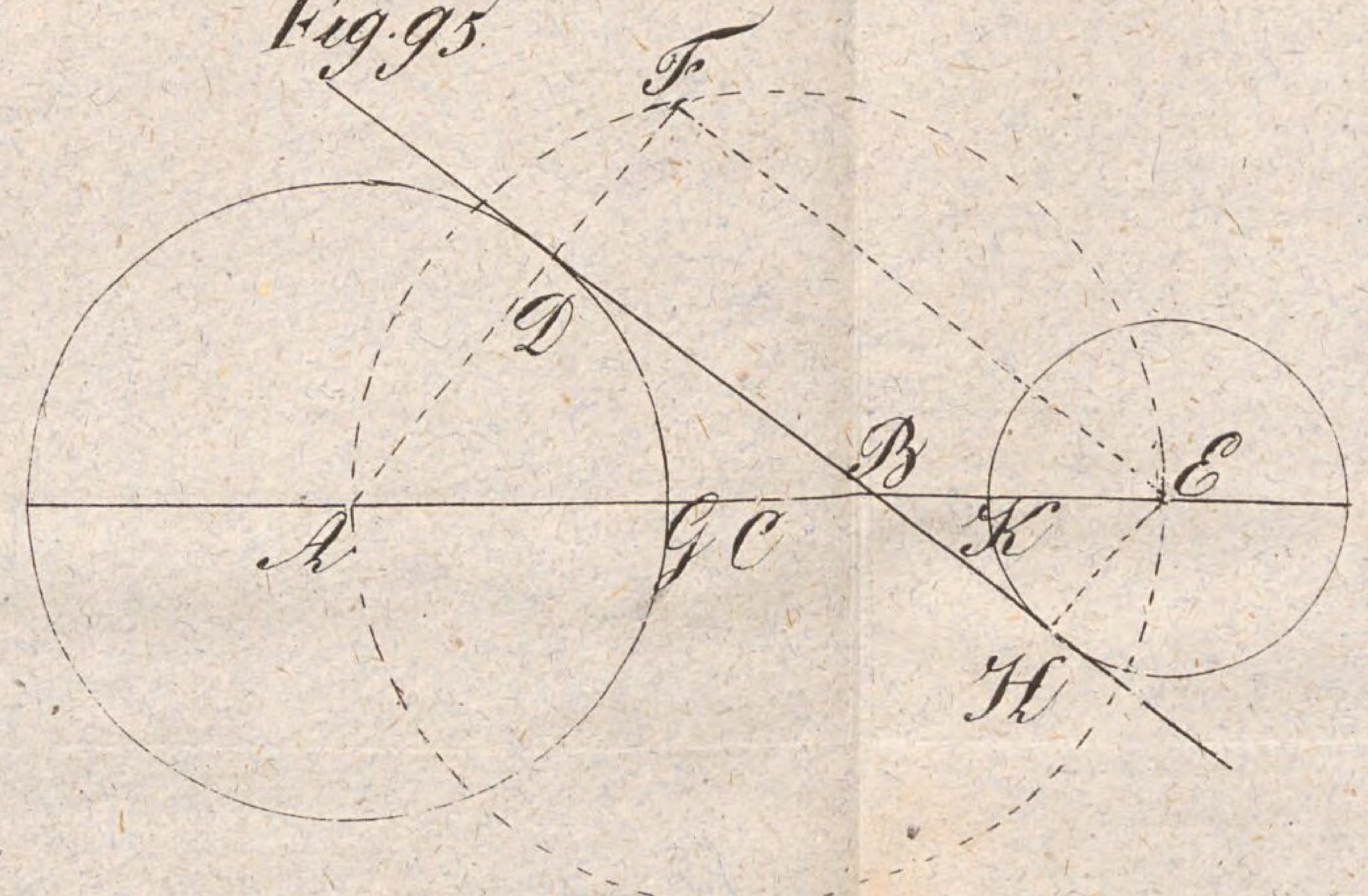


Fig. 96.

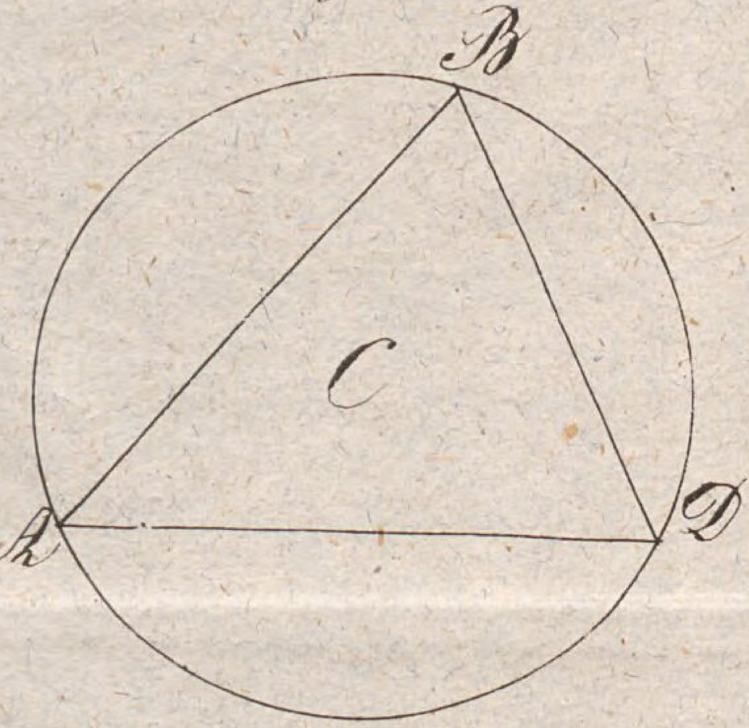


Fig. 97.

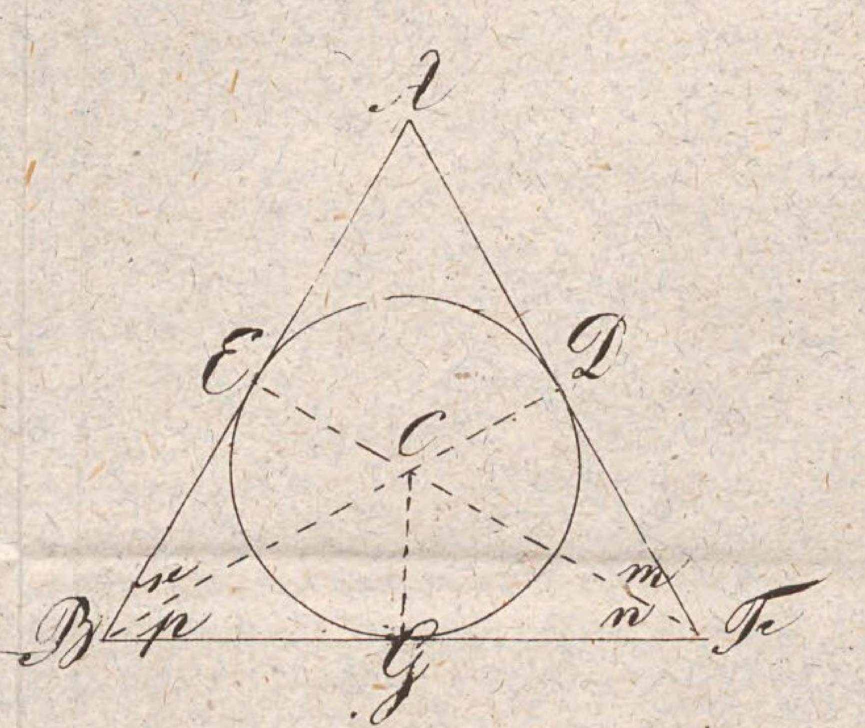


Fig. 98.

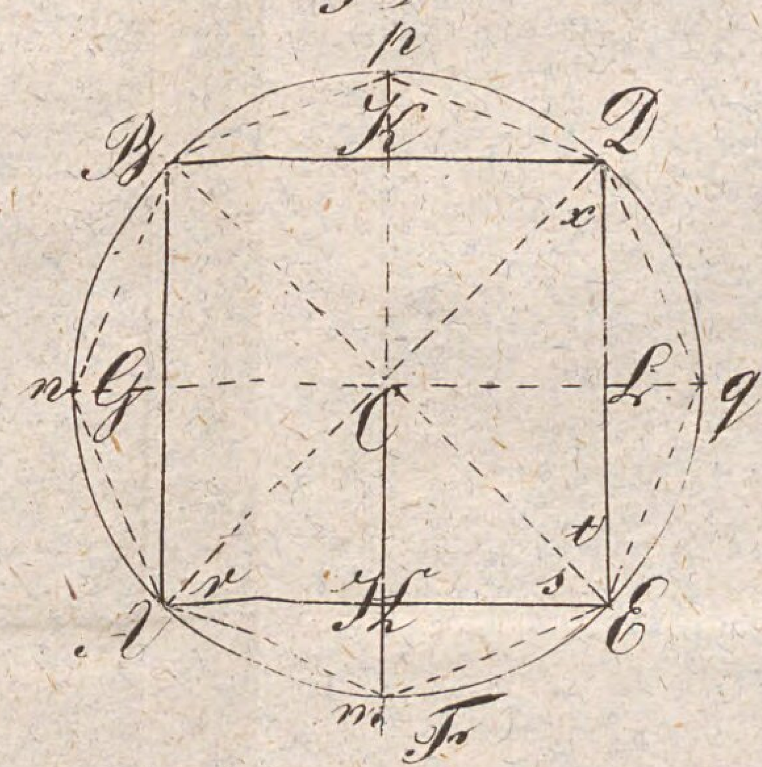


Fig. 99.

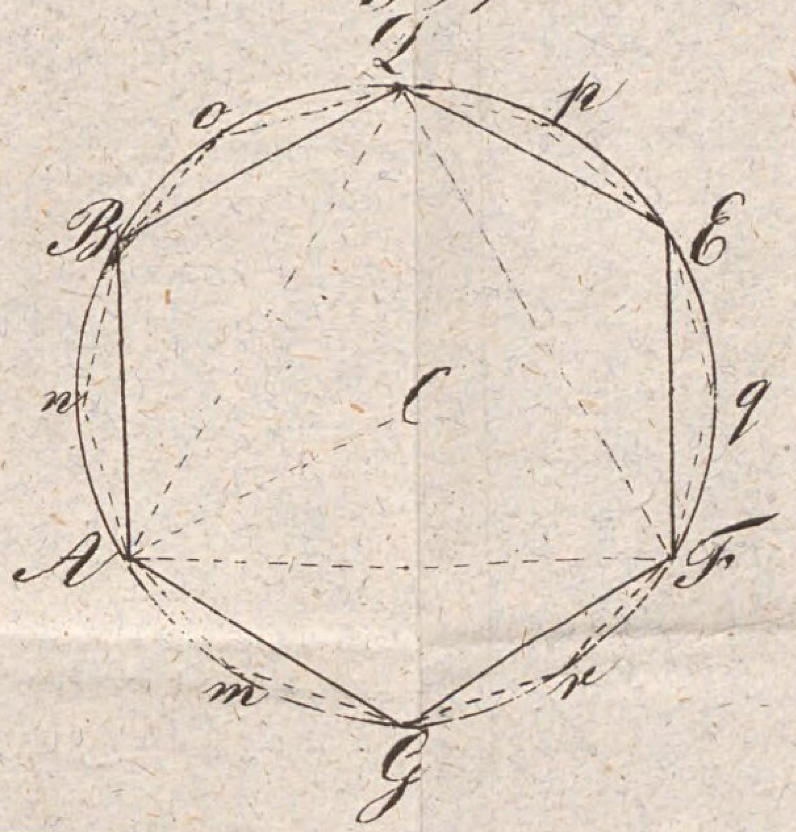
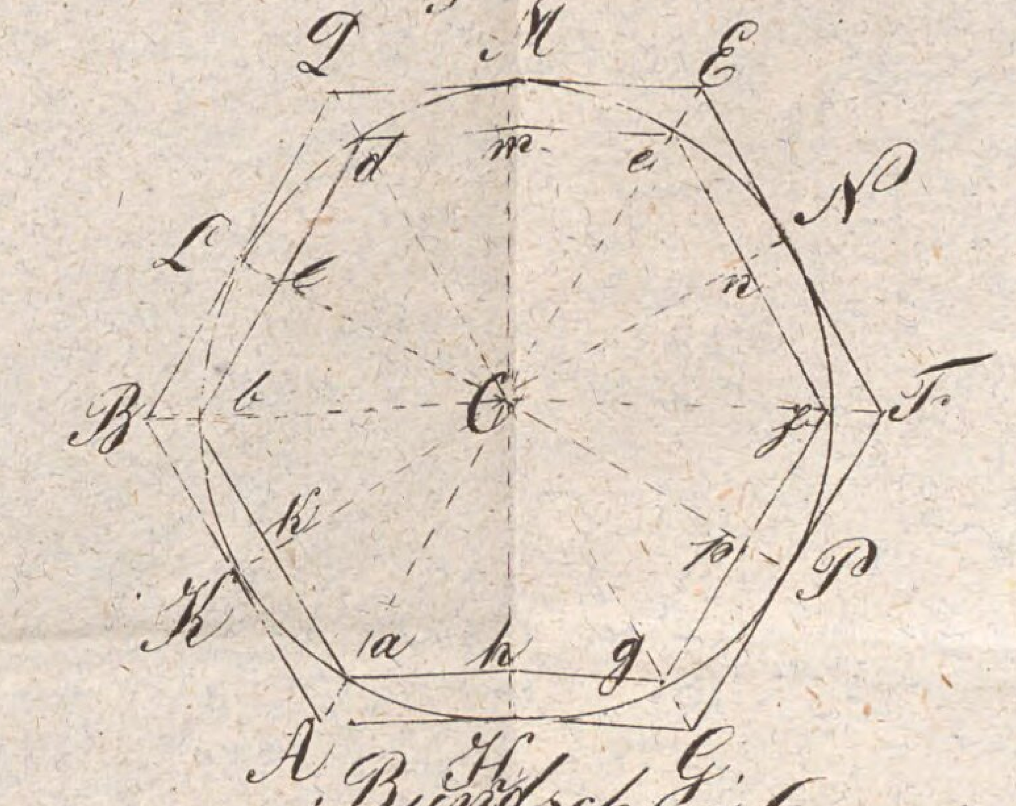


Fig. 100.



Tab. VIII.
Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 119.
Burdschies Geometrie I. Thl.

Tab. IX.

Fig. 120.

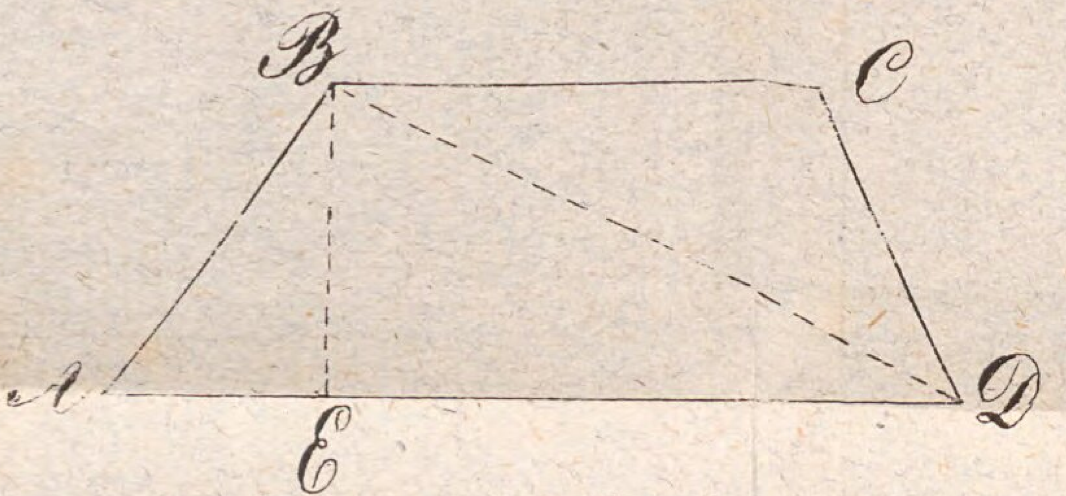


Fig. 121.

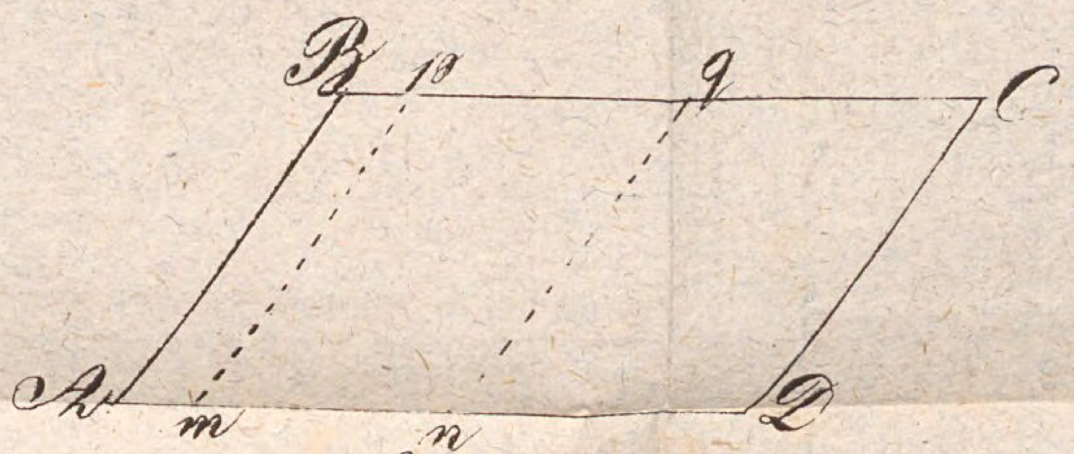


Fig. 122.

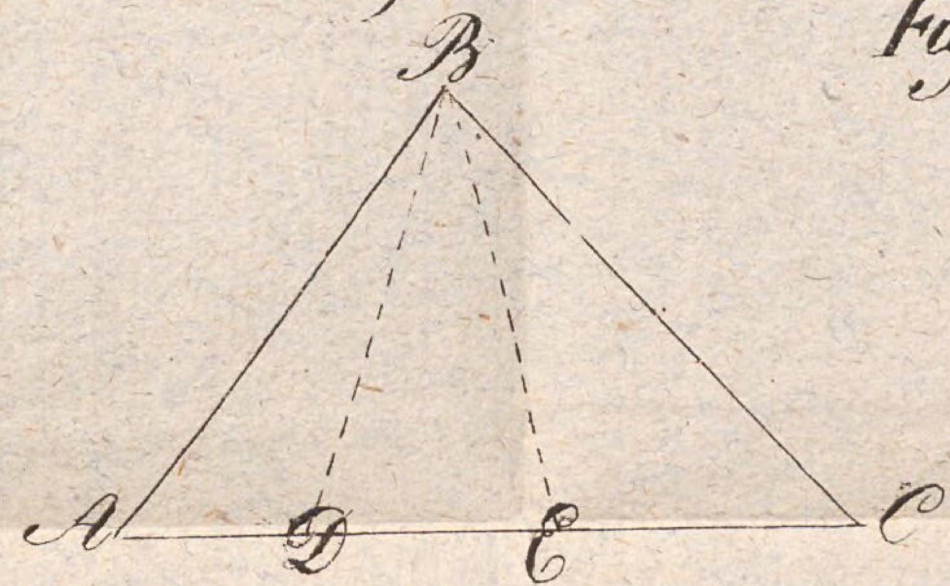


Fig. 123.

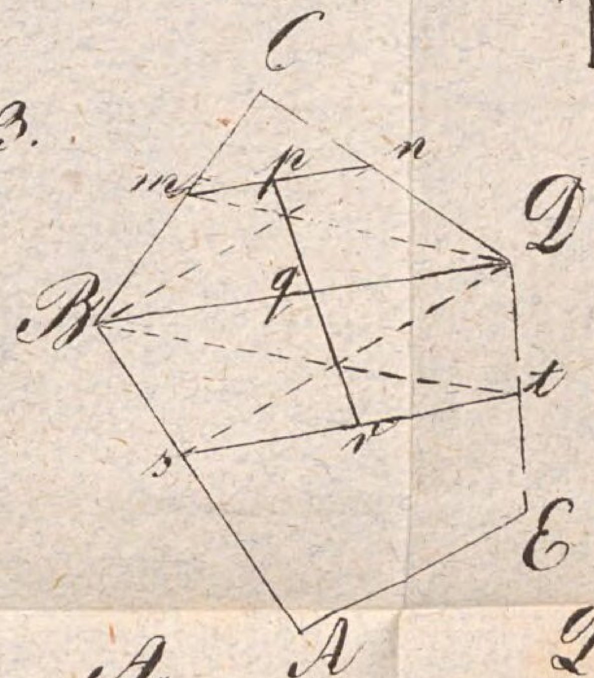


Fig. 124.

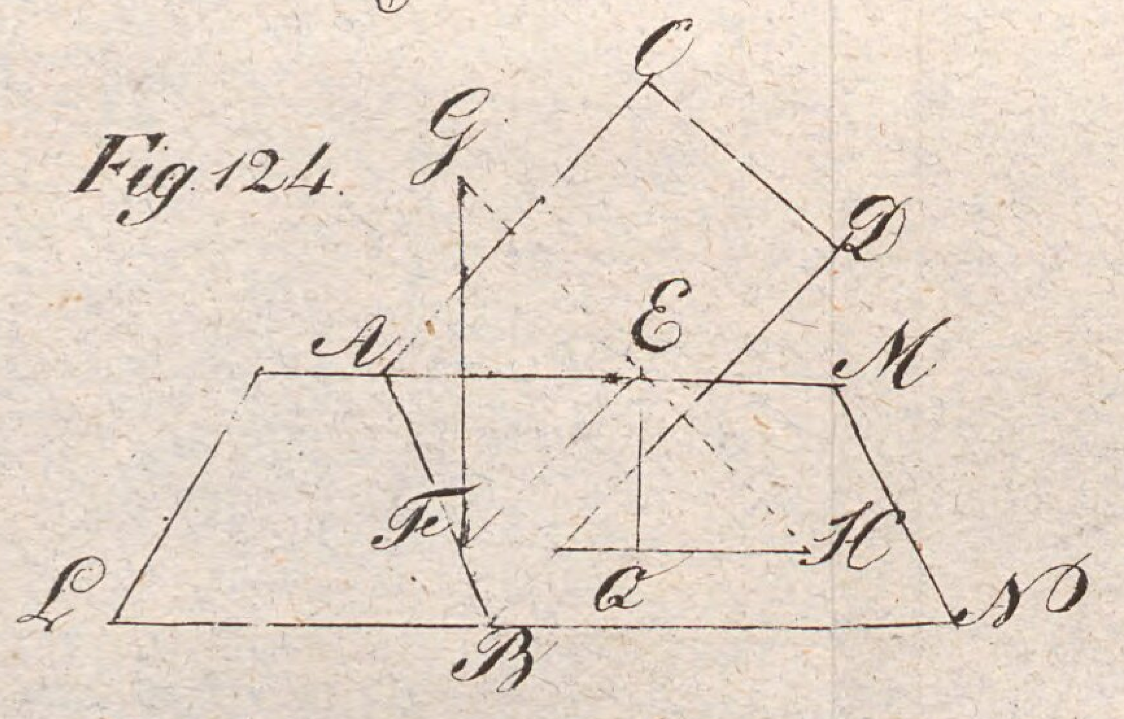


Fig. 125.

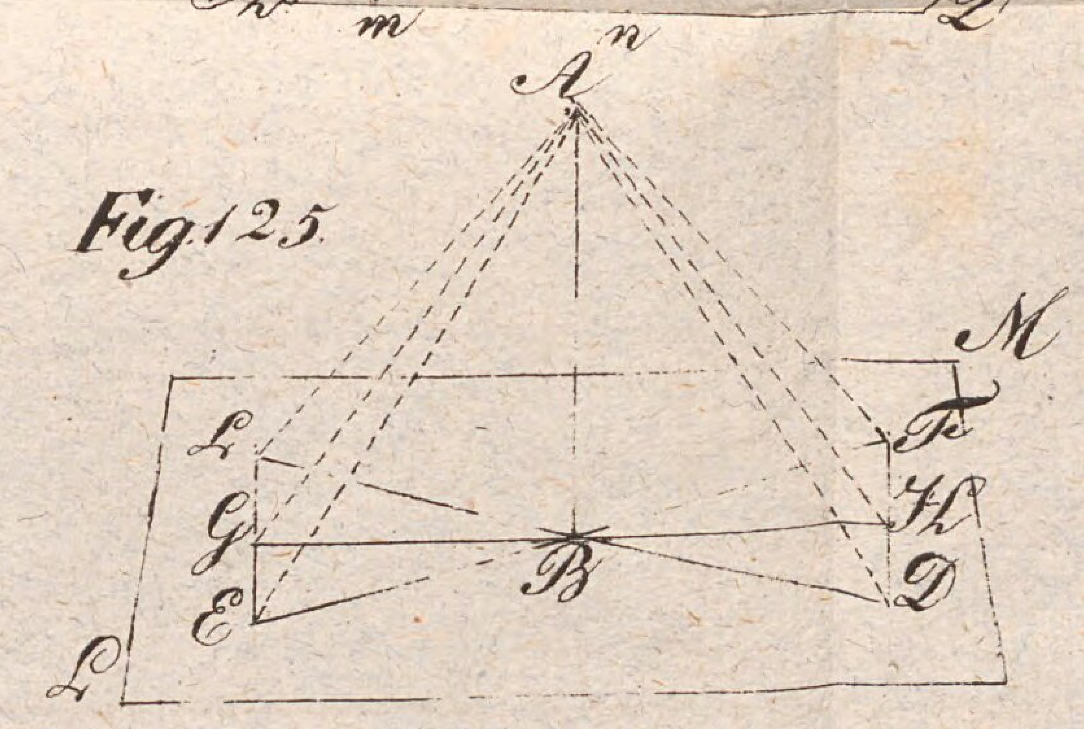


Fig. 126.

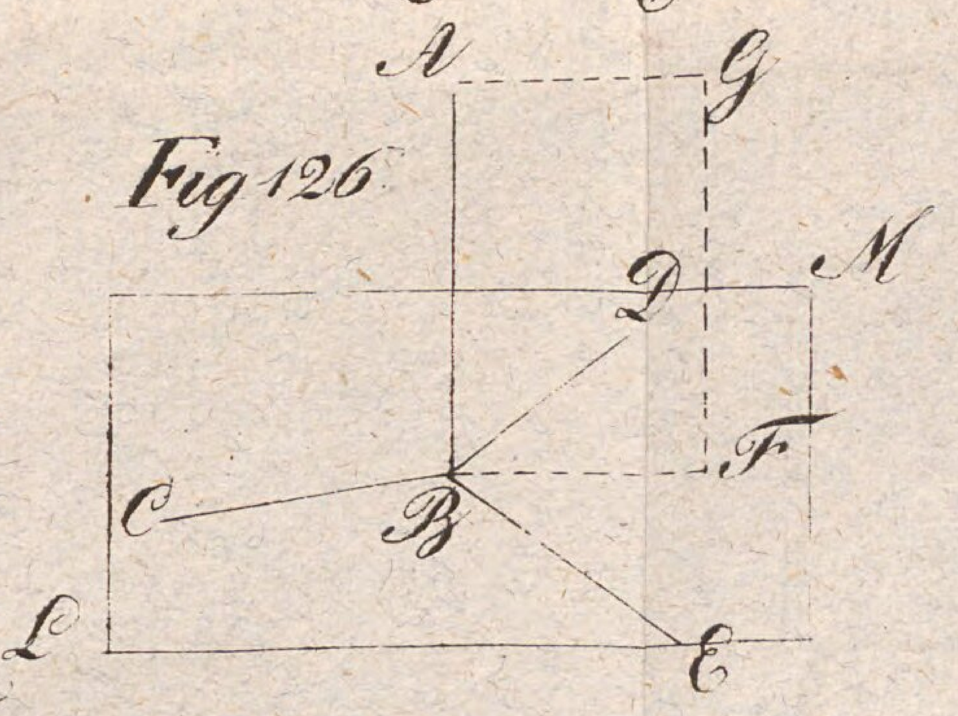


Fig. 127.

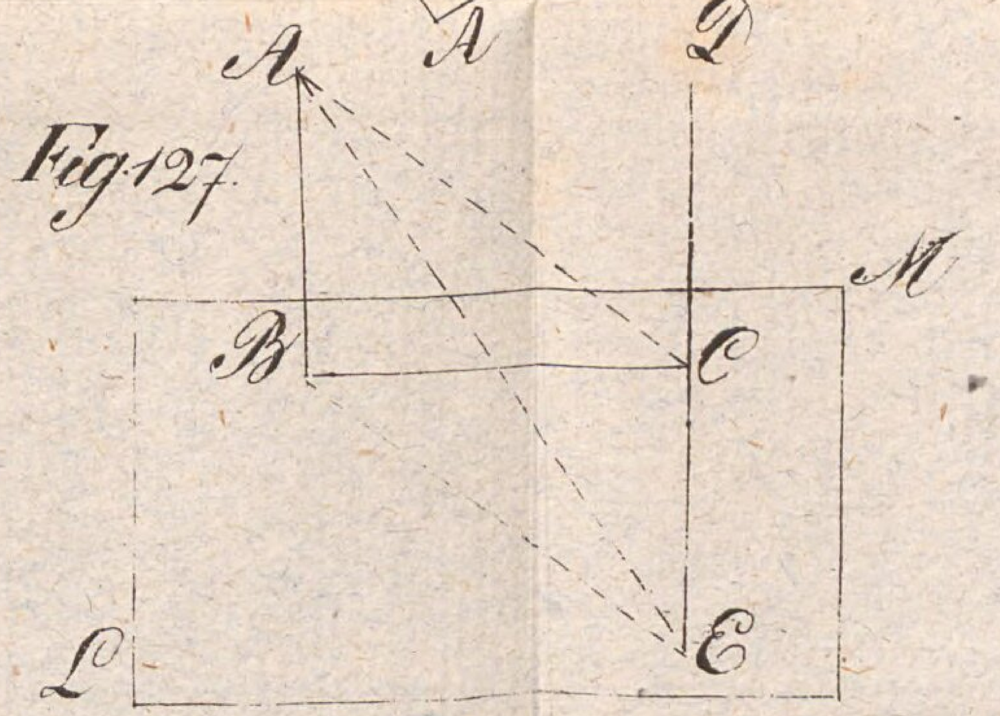


Fig. 128.

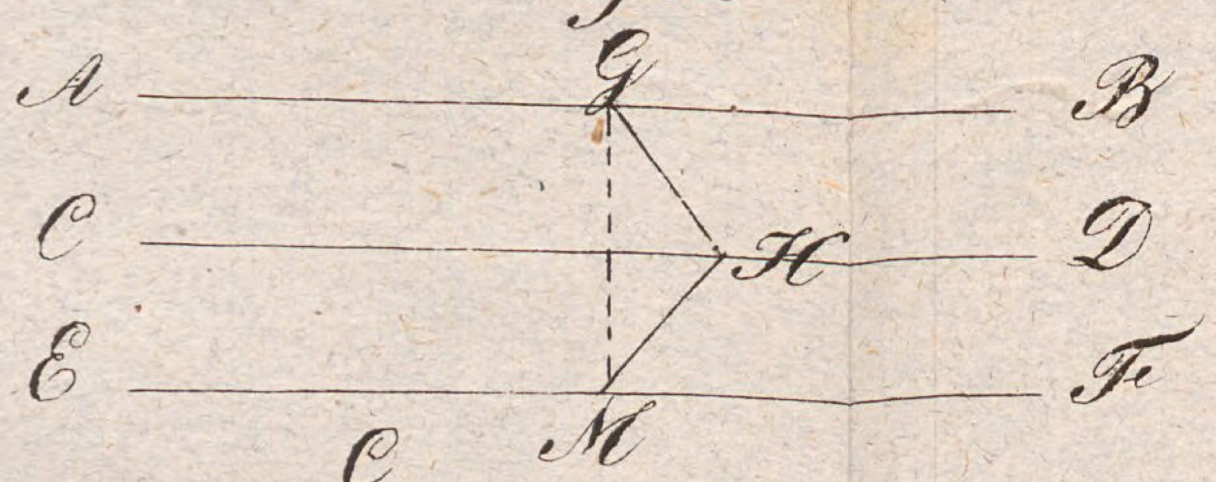


Fig. 129.

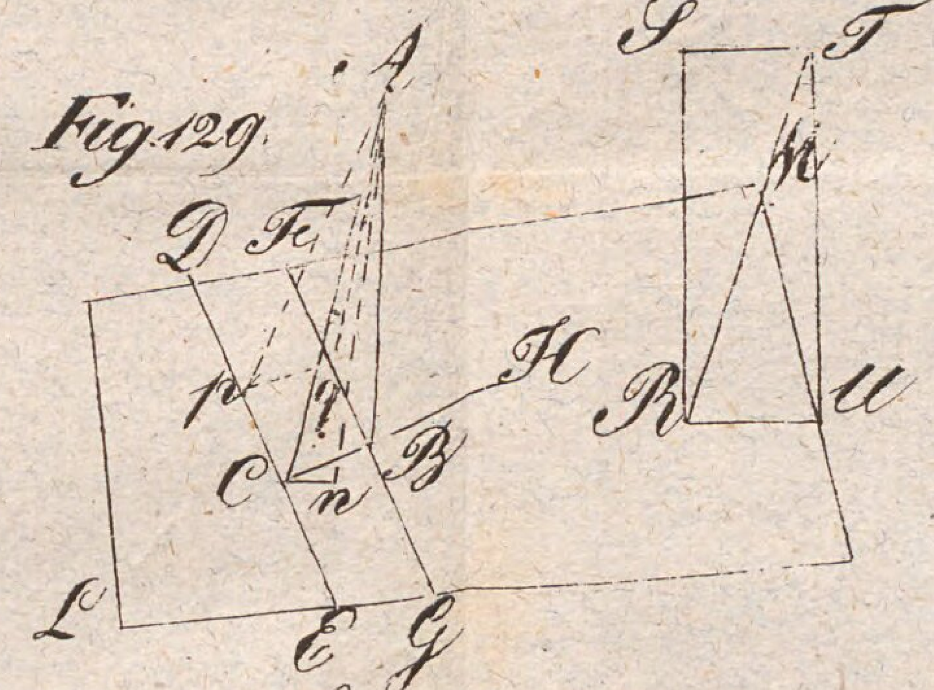


Fig. 130.

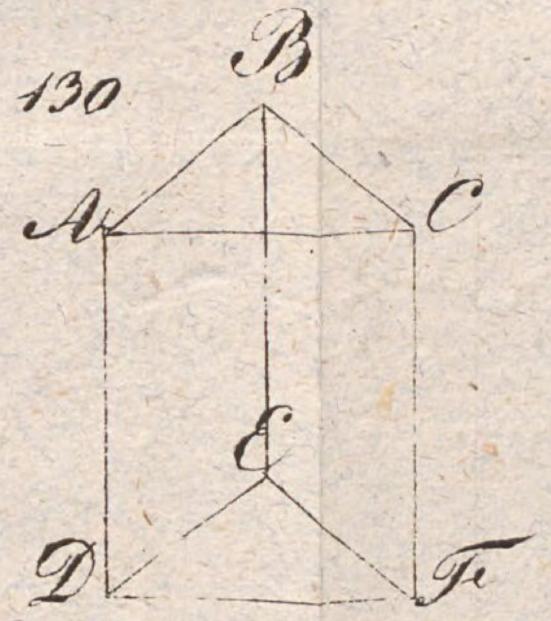


Fig. 131.

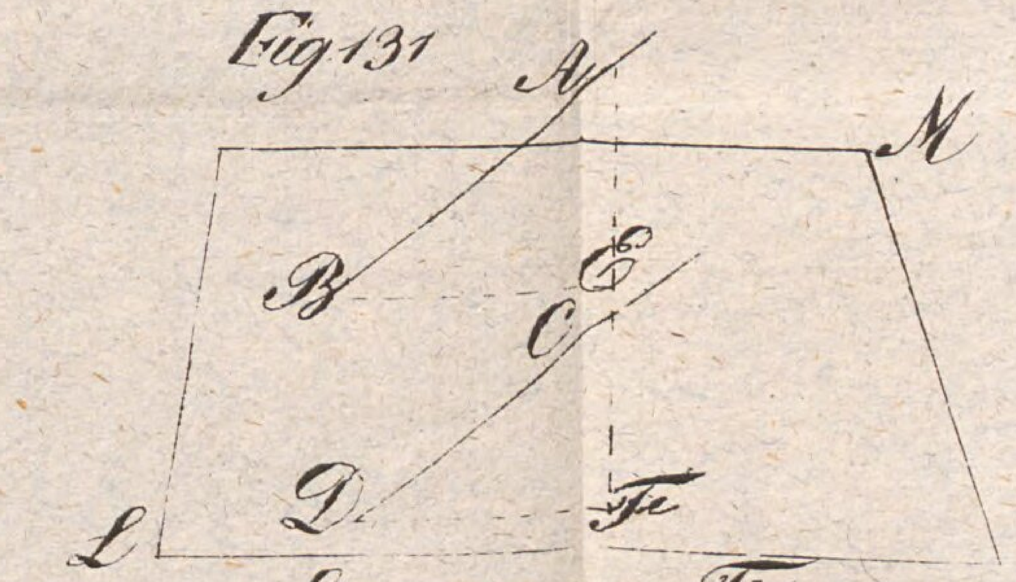


Fig. 132.

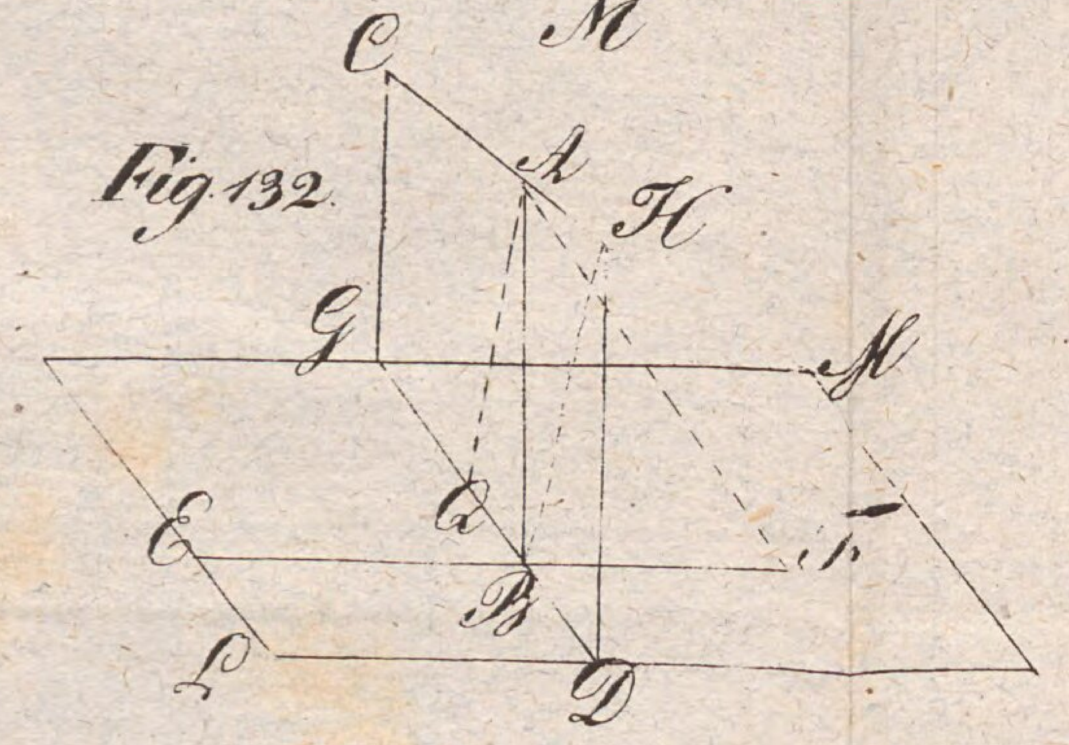


Fig. 133.

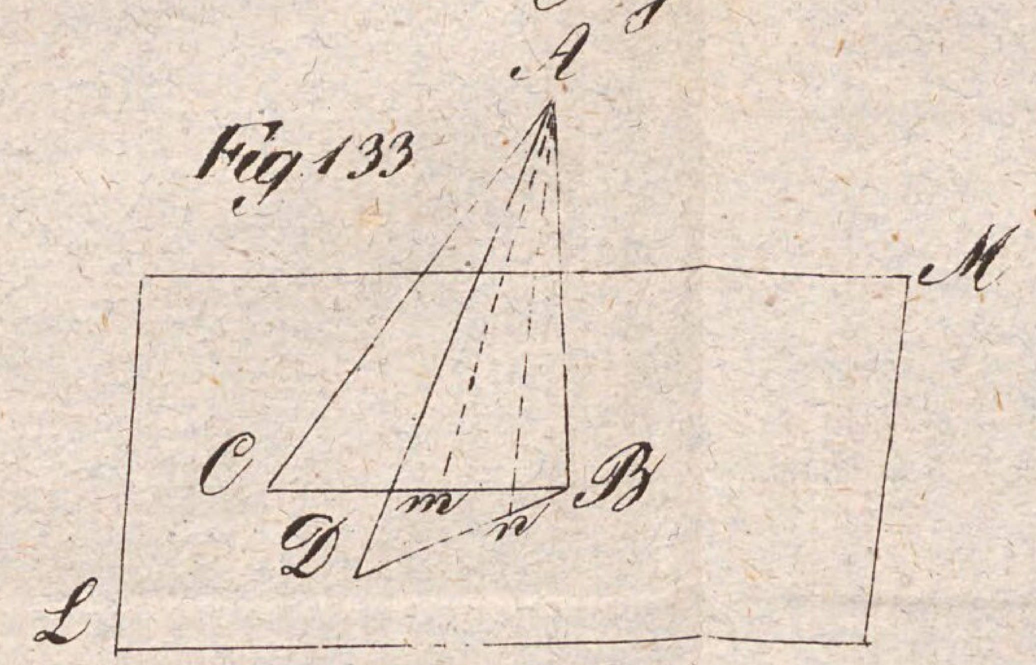


Fig. 134.

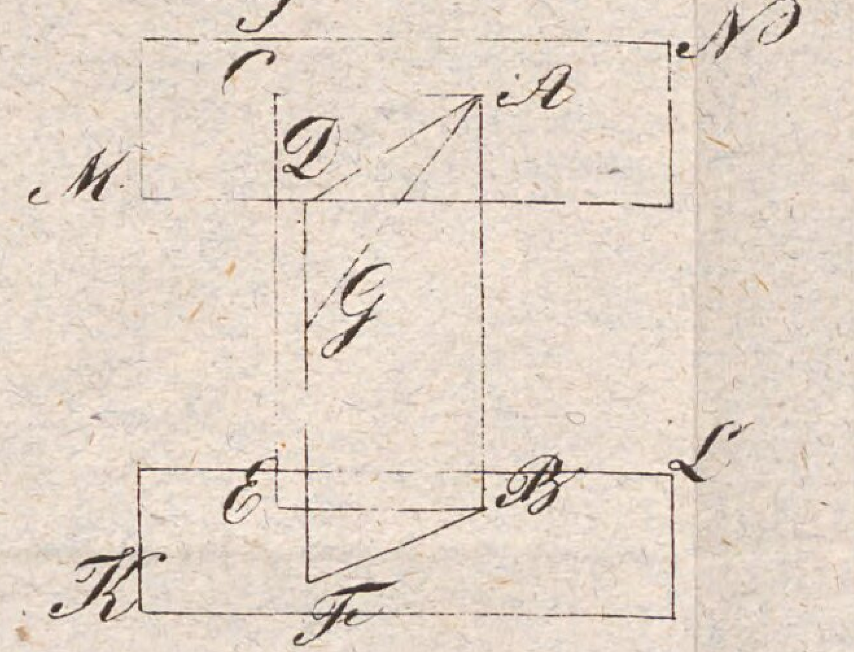
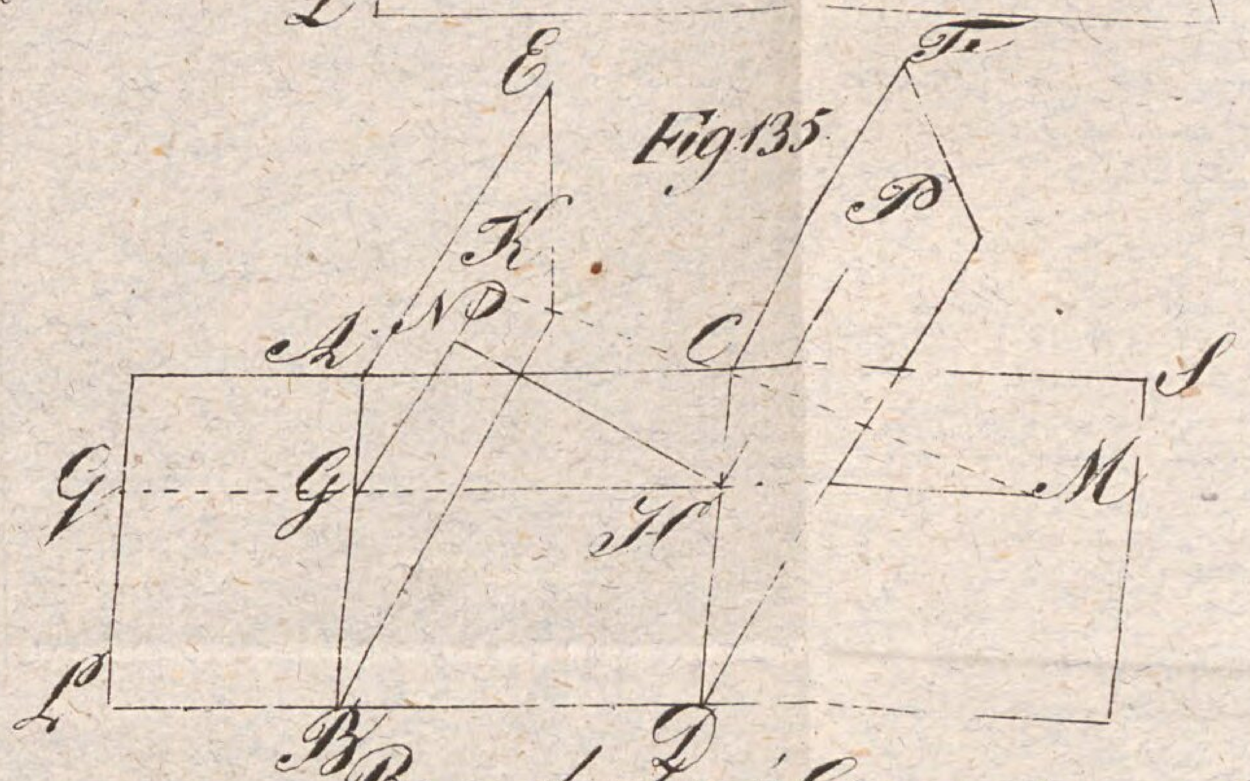



Fig. 135.